INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

JOÃO PITOMBEIRA DE CARVALHO

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini — Introdução à Teoria dos Grupos

2) Nathan M. Santos — Vetores e Matrizes

3) Manfredo P. Carmo — Introdução à Geometria Diferencial Global

4) Jacob Palis Jr. — Sistemas Dinâmicos

5) João Pitombeira de Carvalho — Introdução à Álgebra Linear

6) Pedro Fernandez — Introdução à Teoria das Probabilidades

para a Ivânia

PREFÁCIO

Êste livro reflete a experiência que adquirimos na ontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, nos rês últimos anoe, sôbre o ensino da álgebra linear para s alunos dos ciclos básicos dos centros técnico-científi os em nossas universidadee.

A matéria aqui tratada é assunto do segundo curso e álgebra linear com a duração de um semestre, reunindo-se três horas por semana, para aulas teóricas e uma hora xtra para exercícios.

Queremos deixar bem claro que não se trata de um ratado de álgebra linear, ou de um curso completo destiado a bacharéis em matemática. Êle retrata fielmente, es eramos, o que a experiência mostrou ser possível ensinar alunos destinados às ciências básicas (matemática, físi a e química) ou às engenharias. A fim de tornar o livro ais completo e unificado foram incluidos alguns tópicos m geral não cobertos no curso. O livro é auto-suficiente, om a exceção de alguns resultados básicos da teoria dos eterminantes e familiaridade com matrizes.

Os pré-requisitos para o livro são cobertos no pri eiro curso de álgebra linear, que tem também a duração de m semestre: os espaços R^n, o cálculo matricial, a teoria os sistemas lineares.

Pràticamente todos os colegas do Departamento de atemática da PUC participaram da confecção dêste livro, om sugestões, idóias e encorajamento. Desejo ressaltar, articularmente, a colaboração daqueles junto com os quais ecionei, durante vários semestres, êste curso: Israel

Vaisenchaer, Jair Koiller, João Cândido Portinari, José Carlos de Souza Kiihl. Muitos dos exercícios incluidos no capítulo final foram propostos por êles em exames ou testes, cabendo aqui agradecer a permissão para usá-los.

Agradeço ao Prof. Elon Lages Lima o convite para publicar êste livro pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Uma primeira versão do livro foi usada na PUC, com sucesso. Queremos externar nossa gratidão a Tânia Regina Vieira d'Ávila que conseguiu, em pouco tempo, decifrar o manuscrito original e datilografá-lo rápida e competentemente. Wilson Góes, com sua costumeira eficiência, datilografou a versão definitiva, pelo que deixo aqui meus agradecimentos.

Rio de Janeiro, julho de 1971

João Pitombeira de Carvalho

Dopartamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do
Rio de Janeiro

APRESENTAÇÃO

Embora êste seja um livro sem nehuma novidade revolucionária, achamos conveniente apresentar algumas palavras de explicação e justificação.

Em primeiro lugar, trata-se de um livro elementar. Atualmente os cursos de Álgebra Linear começam a ser dados em quase todos os cursos básicos de nossas univereidades aos alunos destinados às engenharias e ciências. Como, em muitos casos, esta matéria é ensinada aos alunos logo no primeiro ano do curso, é necessário evitar a tentação de querer ensinar-lhes, em pouco tempo, aquilo que ainda não estão em condições de assimilar. Por isso, nada de teoria dos polinômios ou formas canônicas, que devem vir, para os alunos de fato interessados em Matemática, num estágio posterior. É necessário manter, durante todo êste curso introdutório, uma base geométrica e intuitiva. Achamos mesmo que, neste estágio, é às vêzes bem mais eficiente descrever geomètricamente um teorema e fazer alguns exemplos do que se preocupar com a compreensão perfeita de sua demonstração formal. Um caso típico é o processo de Gram-Schmidt, fácil de vizualização e de aplicação mas para o qual os alunos, em geral, não percebem a necessidade de uma demonstração correta.

Tratamos, exclusivamente, de espaços vetoriais de dimensão finita. Por isso, base, para nós, é <u>base finita</u>. A idéia de apresentar a noção de dependência e independência linear em têrmos de equações vetoriais com soluções escalares tem funcionado muito bem na prática (agradecemos essa sugestão a Henrique Browne).

Concordamos plenamente com a idéia de S. Lang, expressa em seu livro "Linear Algebra", de que, em um primeiro curso, os corpos considerados devem ser corpos numéricos, i.e., sub-corpos dos números complexos. Assim, neste livro, corpo qüer sempre dizer corpo numérico.

Achamos o segundo capítulo importantíssimo. Em primeiro lugar, ataca um tópico difícil, a noção de função ou transformação e que não deve ser abordada dentro de um espírito de rigor lógico e formal: as definições básicas devem ser apresentadas simplesmente, limitadas ao mínimo indispensável e seguidas de inúmeros exemplos. Convém frizar que a maioria dos alunos só encontrou até aqui funções reais de uma variável real.

A segunda parte dêste capítulo serve de preparação e motivação para tudo o que vem depois. Algumas vêzes, quando o curso foi dado sem esta parte, notou-se que os alunos dificilmente se habituaram ao conceito de transformação linear e eram incapazes de apresentar exemplos concretos, geométricos, como cisalhamentos, dilatações, etc. Uma experiência também feita com sucesso foi dar em primeiro lugàr o capítulo 2, e sòmente em seguida estudar o capítulo 1.

Do posse dos conceitos do segundo capítulo, é fácil motivar o estudo das transformações lineares; em alguns casos, as demonstrações apresentadas no capítulo 3 são simples repetições do que foi feito no capítulo 2. Demos grande ênfase ao teorema do núcleo e da imagem, que pode ser aplicado com sucesso para um estudo completo e geométrico dos sistemas lineares. O método aqui empregado, usando as colunas da matriz do sistema foi preferido por seu conteúdo extremamente geométrico. Da mesma maneira, quando tratamos das transformações lineares inversíveis, embora de-

mos demonstrações (desenvolvidas ou propostas como exercícios) usando o teorema do núcleo e da imagem, voltamos a apresentar os mesmos teoremas com demonstrações geométricas.

Ao tratar os produtos internos, o objetivo foi chegar o mais rápido possível ao teorema de representação dos funcionais lineares, para o qual são também dadas duas demonstrações, uma delas de caráter bem geométrico. Sempre que possível, consideramos os espaços vetoriais sôbre um corpo numérico K, que pode ser o corpo real ou complexo. Nesta parte e na seguinte, que trata da definição de adjunta de uma transformação linear, é essencial apresentar exemplos concretos, fazer contas. Aliás, um outro princípio básico por trás de todo o livro é que a compreensão de um teorema só pode ser testada por sua aplicação a exemplos. Isso tem a vantagem extra de exigir um bom domínio da teoria dos sistemas lineares, visto que quase todos os cálculos de álgebra linear recaem na solução de um tal sistema.

Podemos agora passar para a parte seguinte do livro, que é um coroamento de tudo o que foi feito antes. Geralmente, em nosso curso, nos limitamos a cobrir os §5.1 e 5.2, culminando com o teorema espectral para transformações auto-adjuntas. Em alguns casos, dependendo do nível da turma e da disponibilidade de tempo, foi possível abordar as transformações unitárias e normais ou as formas quadráticas. Achamos que êstes tópicos apresentam a transição entre o presente curso e um curso mais avançado: talvez sòmente após um estudo das formas canônicas verá o aluno o interêsse em caracterizar as transformações diagonalizáveis em base ortonormal.

Estas notas foram, naturalmente, muito influenciadas pelos livros onde primeiro estudamos o assunto: Birkhoff and MacLane, "A Survey of Modern Algebra"; E.L. Lima, "Cálculo Tensorial"; Gelfand, "Linear Algebra"; P.R. Halmos, "Finite Dimensional Vector Spaces". O curso de álgebra linear da PUC do Rio de Janeiro no qual êste livro se baseou foi originalmente estruturado segundo o livro "Linear Algebra" de S. Lang o qual também, por isso, nos influenciou, ditando a ordem geral da apresentação dos assuntos.

Apresentamos, agora, o currículo que temos em geral seguido em nosso curso de aproximadamente 45 horas de aulas teóricas e umas 12 horas de exercícios: Capítulo 1: §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5; Capítulo 2: §§ 2.1 e 2.2; Capítulo 3: §§ 3.1, 3.2 e 3.3; Capítulo 4: §§ 4.1, 4.2 e 4.3; Capítulo 5: §§ 5.1 e 5.2.

Algumas vêzes, no livro, um conceito nôvo é primeiro definido em casos particulares, e sòmente posteriormente definido em tôda sua generalidade. Por vêzes, apresentamos uma definição em exercícios ou exemplos, antes de dá-la formalmente no texto, ou repetimos uma definição, a fim de torná-la mais familiar.

Gostaríamos que críticas, sugestões e comunicações de erros ou enganos nos fôssem enviados por todos os que usarem êste livro.

Ao estudante

Os exercícios e exemplos intercalados no texto do livro fazem parte integrante do curso. Caso você tente estudar sòmente a teoria verá que em pouco tempo o assunto se tornará mais e mais difícil, até ser impossível assimilá-lo. Resolva os exercícios à medida que fôr estudando. Se, de repente, você não é capaz de resolver a maior parte dos exercícios propostos, aconselhamos que volte atrás e faça uma revisão cuidadosa dos exercícios passados, da teoria e dos exemplos. Um esfôrço considerável foi feito para colocar os exercícios e exemplos no local apropriado, de maneira a que se integrem naturalmente no texto.

No fim do livro, encontra-se um capítulo de exercícios e problemas propostos em testes e exames, muitos dêles do tipo múltipla escolha.

ÍNDICE

.-.

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS VETORIAIS

1.1 - Corpos Numéricos

No cálculo, estudamos funções reais de uma variável real ou seja, funções cujo domínio é o conjunto dos números reais (ou um subconjunto do mesmo) e cujo contradomínio é também o conjunto dos reais. No entanto, antes de passarmos a estudar as propriedades importantes das funções (continuidade, derivabilidade, etc.) e a trabalhar com estas é necessário ver algumas das propriedades dos números reais. Mas não devemos perder de vista o fato de que o interessante são as funções. Uma situação análoga se nos depara em álgebra linear: os objetos realmente importantes são as transformações lineares, um tipo particular de funções cujos domínios e contradomínios são conjuntos dotados de uma estrutura extremamente importante: os espaços vetoriais. Vamos, portanto, inicialmente, estudar as propriedades básicas dos espaços vetoriais. Antes de definir um espaço vetorial é necessário dizer o que é um <u>corpo numérico</u>: é um subconjunto K dos números comple-

xos fechado em relação às operações elementares; isto é, se efotuarmos somas, subtrações, produtos e divisões (com divisor diferente de zero) com elementos de um corpo K obteremos sempre um elemento de K. Isto pode ser tornado mais preciso como segue:

DEFINIÇÃO 1.1.1 - Um corpo K é um subconjunto dos números complexos tal que:

1) $\forall x,y \in K$, então $x+y \in K$ e $x \cdot y \in K$;

2) os números 0 e 1 são elementos de K;

3) $\forall x \in K$, então $-x \in K$;

4) $\forall x \in K$, com $x \neq 0$, então $1/x \in K$.

Obviamente, como os elementos de K são números complexos, êles gozam das seguintes propriedades:

5) a associatividade: $\forall x,y,z \in K$, então $x + (y+z) = (x+y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.

6) a comutatividade: $\forall x,y,z \in K$, temos que $x+y = y+x$ e $xy = yx$

7) a distributividade: $\forall x,y,z \in K$, vem que $(x+y)z = xz + yz$

EXERCÍCIOS

1.1.2: Um subconjunto finito dos números complexos pode formar um corpo?

1.1.3: Decida, em cada um dos casos abaixo, se o subcon-

junto dado dos complexos forma ou não um corpo:

a) o conjunto R dos números reais

b) o conjunto Q dos números racionais

c) o conjunto C dos números complexos

d) o subconjunto dos números complexos formado pelos "imaginários puros"

e) o conjunto Z dos números inteiros.

1.1.4: Mostre que, em um corpo K, vale a "lei do cancelamento": se $x,y,z \in K$ e $y \neq 0$ então $xy = zy$ acarreta que $x = z$.

1.1.5: Demonstre que o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais é um corpo.

1.1.6: Verifique se o conjunto $N(\sqrt{2}) = \{n_1+n_2\sqrt{2} \mid n_1,n_2 \in Z\}$ é um corpo. Que axiomas são violados?

1.2 - Espaços Vetoriais

DEFINIÇÃO 1.2.1 - Um conjunto não vazio V é um <u>espaço vetorial</u> sôbre um corpo K se:

1) Existe em V uma operação que a todo par de elementos $u,v \in V$ associa um terceiro elemento de V chamado a "soma" de u com v e denotado por $u+v$.

2) Existe uma operação que a todo $x \in K$ e a todo $v \in V$ associa um elemento de V chamado o "produto" de v

por x e denotado por $x \cdot v$ e estas operações satisfazem os axiomas:

V1) $\forall$ $u,v \in V$ então $u+v = v+u$ (comutatividade da adição de vetores)

V2) $\forall u,v,w \in V$, então $(u+v) + w = u + (v+w)$ (associatividade da adição de vetores)

V3) $\forall x,y \in K, \forall v \in V$, então $x(yv) = (xy)v$

V4) $\forall x,y \in K, \forall v \in V$, temos que $(x+y)v = xv + yv$

V5) $\forall u,v \in V, \forall x \in K$, $x(u+v) = xu + xv$

V6) Existe em V um elemento chamado "vetor zero" denotado por 0 e tal que $\forall v \in V$, $0+v = v+0 = v$

V7) $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$

V8) $\forall v \in V$, existe $u \in V$ tal que $u+v = v+u = 0$.

<u>Observação sôbre os axiomas</u>: Os axiomae V1), V2), V6) e V8) dizem respeito sòmente à operação de adição de vetores. Dos outros axiomas, V4) e V5) relacionam a adição de vetores com a operação de produto por um número, enquanto V3) e V7) referem-se a esta última operação.

Os elementos de V são chamados de <u>vetores</u> e os elementos do corpo K de <u>escalares</u>.

EXEMPLO

1.2.2: Seja $R^2 = \{(x_1,x_2)$ t.q. $x_1,x_2 \in R\}$, isto é,

o conjunto de pares ordenados de números reais. Definiremos a adição de dois elementos $u = (x_1,x_2)$ e $v = (y_1,y_2)$ de R^2 como segue,

$$u+v = (x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) .$$

Se r é um número real e $u = (x_1,x_2)$, então definimos

$$ru = r(x_1,x_2) = (rx_1,rx_2) .$$

Com estas operações, R^2 é um espaço vetorial sôbre R, como mostraremos, em parte, abaixo. O restanto da demonstração é deixado como exercício.

1) Existência do vetor zero: o par $0 = (0,0)$ é tal que se $u = (x_1,x_2)$, então $u+0 = (x_1,x_2) + (0,0) =$
$= (x_1+0, x_2+0) = (0+x_1, 0+x_2) = (0,0) + (x_1,x_2) = 0+u =$
$= u$.

2) Se $u = (x_1,x_2)$, então $1 \cdot u = 1(x_1,x_2) = u$.

EXERCÍCIOS

1.2.3: Se $u = (1,2)$ e $v = (3,-1)$ são elementos de R^2, qual o vetor $u+v$? $u-3v$?, $2u-7v$? Desenhe, em papel quadriculado, êsses vetores.

1.2.4: Que valores devemos atribuir aos números a e b para que $(3,4) = a(1,2) + b(3,-1)$?

1.2.5: Desenhe, em uma fôlha de papel quadriculado, os ve-

tores da forma $(2,4) + t(3,-1)$, onde $t \in R$.

1.2.6: Se definirmos em $V = \{(x_1,x_2)$ t.q. $x_1,x_2 \in R\}$ as seguintes operações: $(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (0,0)$ e $r(x_1,x_2) = (0,0)$, verifique se V é um espaço vetorial sôbre R. Que axiomas são violados? quais são satisfeitos?

1.2.7: Considere $V = \{(x_1,x_2)$ t.q. $x_1,x_2 \in R\}$ e se $u = (x_1,x_2)$, $v = (y_1,y_2)$ são elementos de V, ponha $u+v = (x_1+y_1, x_2+y_2)$, $r \cdot u = (rx_1,0)$, $0 = (0,0)$ e $-u = (-x_1,-x_2)$. Será V um espaço vetorial com estas operações? Que axiomas são violados?

1.2.8: Um espaço vetorial sôbre um corpo K pode ter um número finito de elementos?

1.2.9: Interprete geomètricamente o Exemplo 1.2.2.

1.2.10: Seja $R^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) | x_i \in R, i=1,2,\ldots,n\}$ e se $u = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $v = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $r \in R$, defina $u+v = (x_1,x_2,\ldots,x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$, $ru = r(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (rx_1,rx_2,\ldots,rx_n)$. Prove que com estas operações R^n é um espaço vetorial sôbre R.

EXEMPLO

1.2.11: Considere o conjunto S das listas infinitas de números reais $S = \{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots) | x_i \in R, i=1,2,\ldots$

Podemos somar duas listas somando as "coordenadas" de mesma ordem e multiplicar uma lista por um número real multiplicando cada "coordenada" pelo número real. É fácil verificar que, com estas operações, S' é um espaço vetorial sôbre os números reais.

EXERCÍCIOS

1.2.12: Seja S' o subconjunto de S (ver Exemplo 1.2.11) dado pelas listas cujas coordenadas são tôdas nulas a partir de um certo índice; por exemplo, $(1,2,0,3,0,0,\dots,0,\dots)$, $(1,3,0,0,\dots,0,\dots) \in S'$. Mostre que a soma de dois elementos de S' é um elemento de S' e que o produto de um elemento de S' por um número real é um elemento de S'.

EXEMPLO

1.2.13: Tomemos $V = \{f:R \to R\}$ o conjunto das funções da reta na reta. Dados dois elementos de V, ou seja, duas funções f e g, definiremos sua soma f+g como o seguinte elemento de V:

$$f+g: R \to R$$
$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

e o produto de um elemento f de V por um número real r como sendo a função rf dada por

$$rf: R \to R$$
$$x \mapsto rf(x) .$$

Em primeiro lugar, se $f, g \in V$, $f+g = g+f$, pois se $x \in R$, $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ e assim $f+g = g+f$. Testar a associatividade é igualmente fácil. Seja, por outro lado, a função $f_0: R \to R$ tal que $f_0(x) = 0, \forall x \in R$. Então, se $f \in V$, vemos imediatamente que $f+f_0 = f_0+f = f$. Além disso, se $f: R \to R$ considere $h: R \to R$ tal que $h(x) = -f(x), \forall x \in R$ e resulta que $f+h = h+f = f_0$.

A função f_0 considerada acima e cujo valor é sempre nulo será denotada por 0. A função h será chamada de $(-f)$. Deixamos como exercício verificar os outros axiomas.

EXERCÍCIOS

1.2.14: Verifique completamente os axiomas para o Exemplo 1.2.13.

1.2.15: Se $f: R \to R$ é dado por $x \mapsto 2x$ e $g: R \to R$ é definida por $x \mapsto e^x$, qual é a função $f+g$? Qual a função $2f-3g$?

1.2.16: Se $p, q: R \to R$ são definidas por $x \mapsto 3x^2 + 5x-3$, $x \mapsto 4x+7$ respectivamente, qual a função $p+q$?

1.2.17: Seja $f: R \to R$ dada por

$x \mapsto 1$ x racional

$x \mapsto 0$ x irracional

e $g: R \to R$ dada por

$x \mapsto 1$ x irracional

$x \mapsto 0$ x racional.

Qual a função $f+g$? $f-g$? $g-f$?

1.2.18: Interprete, usando os gráficos das funçõee, as definições do Exemplo 1.2.13.

1.2.19: Dado um corpo K, mostre que o conjunto K é um espaço vetorial sôbre K com as operações de soma e produto de números complexoe.

1.2.20: Seja K um corpo. Considere $K^2 = \{(k_1,k_2)|k_1,k_2 \in K\}$ defina as seguintes operações:

1) se $u = (k_1,k_2)$, $v = (k_1',k_2')$, $u+v = (k_1+k_1',k_2+k_2')$

2) se $k \in K$, $v = (k_1',k_2')$, $kv = (kk_1',kk_2')$.

Mostre então que K^2 é um espaço vetorial sôbre K. Generalize êste exercício para $K^n = \{(k_1,k_2,\dots,k_n)|k_i \in K, i=1,2,\dots,n\}$.

EXEMPLOS

1.2.21: Chame de $M(2 \times 2)$ o conjunto das matrizes quadradas 2x2 com coeficientee reais. É fácil verificar que com as operações de soma de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, obtemos um espaço vetorial sôbre os números reais.

1.2.22: Considere P_n o conjunto dos polinômios reais

$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$ de grau $\leq n$. Se $p(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$, defina a soma $p(t) + q(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \ldots + (a_n+b_n)t^n$ e se $r \in R$ ponha $rp(t) = ra_0 + ra_1t + \ldots + ra_nt^n$. Demonstra-se então, sem dificuldades, que com estas operações, P_n é um espaço vetorial sôbre os números reais.

EXERCÍCIOS

1.2.23: Demonstre, com detalhes, o Exemplo 1.2.22.

1.2.24: Mostre que o conjunto dos polinômios a coeficientes reais e de grau <u>igual a n</u> não é um espaço vetorial com as operações do Exemplo 1.2.22.

1.2.25: Considere os sistemas lineares abaixo e ache suas soluções:

a) $3x-2y = 0$

b) $2x+5y = 0$
$3x-4y = 0$

c) $3x-7y = 0$
$6x-14y = 0$

d) $2x+4y-3z = 0$
$3x-2y+2z = 0$

1.2.26: Uma solução do sistema a) acima é um par de números reais. Mostre que se os pares (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são soluções do sistema, então (x_1+x_2, y_1+y_2) e (rx_1,ry_1) também são soluções.

1.2.27: Demonstre afirmações análogas às do exercício anterior para as soluções de b), c) e d).

EXEMPLOS

1.2.28: Dado um sistema linear homogêneo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

suas soluções são n-listas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais. A soma de duas soluções será uma solução e o produto de uma solução por um número real será também uma solução. Isso mostra que o conjunto das listas soluções será um espaço vetorial sôbre R (faça os detalhes).

1.2.29: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sôbre um corpo K e considere o conjunto $V = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2\}$. Definamos em V as seguintes operações: $(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$ e $k(v_1, v_2) \doteq (kv_1, kv_2)$. Verifica-se então (faça-o) que, com estas operações, V é um espaço vetorial sôbre K, chamado soma direta de V_1 e V_2 e denotado por $V_1 \oplus V_2$.

Vejamos, agora, algumas conseqüências fáceis dos axiomas. O axioma V6) diz que há um vetor neutro em relação à operação de adição dos vetores; o lema abaixo mostra que êle é único:

LEMA 1.2.30 - Se V é um espaço vetorial sôbre um corpo K e $0, 0' \in V$ são tais que, para todo $v \in V$, $v+0 = 0+v = v+0' = 0'+v = v$, então $0 = 0'$.

Demonstração: Como, para todo $v \in V$, $v+0 = v$, vem que, fazendo $v = 0'$, $0'+0 = 0'$, por outro lado, como $v+0' = v$, para todo $v \in V$, obtém-se, fazendo $v=0$ que $0+0' = 0$. Vemos assim que $0' = 0'+0 = 0+0' = 0$.

Outro fato, de fácil demonstração, é o seguinte:

LEMA 1.2.31 - Se $0 \in K$ e $v \in V$, onde V é um espaço vetorial sôbre K, então $0.v = 0$ (observe que, nesta igualdade, o zero do lado esquerdo é o número zero, e o zero do lado direito é o vetor zero de V, o elemento neutro em relação à adição de vetores).

Demonstração: Temos que $0.v = (0+0).v = 0.v + 0.v$ pelo axioma V4). Por V8), o vetor $0.v$ tem um negativo, que chamaremos de u. Então, adicionando u a ambos os lados de $0.v = 0.v + 0.v$ obtemos que $0.v + u = (0.v+0.v) + u = 0.v + (0.v+u)$ e como $0.v+u = 0$ vem que $0 = 0.v+0 = 0.v$.

LEMA 1.2.32 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K e $k \in K$. Então, $k.0 = 0$.

Demonstração: Temos que $k.0 = k.(0+0) = k.0 + k.0$. Soman-

do a ambos os membros um negativo v de $k.0$, vem que $0 = k.0 + v = (k.0+k.0) + v = k.0 + (k.0+v) = k.0+0 = k.0$, e assim fica concluida a demonstração.

LEMA 1.2.33 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K e dados $u, u', v \in V$ com $u+v = u'+v = 0$, então $u = u'$.

<u>Demonstração</u>: Se $v+u = 0$, segue-se que $(v+u)+u' = 0+u' = u'$, donde $u' = (v+u)+u' = v+(u+u') = v+(u'+u) = (v+u')+u = 0+u = u$.

Passaremos a denotar o (único) negativo de um vetor u por $-u$. Existe uma maneira fácil de achar o negativo de um vetor qualquer.

LEMA 1.2.34 - Se $v \in V$, então $-v = (-1)v$.

<u>Demonstração</u>: Com efeito, se mostrarmos que $(-1)v+v = 0$, teremos concluido a demonstração, devido à unicidade do negativo; mas $(-1)v+v = (-1)v + 1.v = ((-1)+1)v = 0.v = 0$

LEMA 1.2.35 - Se $v \in V$ e $a.v = 0$ com $a \neq 0$, então $v = 0$.

<u>Demonstração</u>: Como $a \neq 0$, a admite um inverso a^{-1}; temos então: $a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v=0$.

EXERCÍCIO

1.2.36: Indique todos os axiomas dos espaços vetoriais que foram usados nas demonstrações dos lemas.

1.3 - A noção de subespaço vetorial

DEFINIÇÃO 1.3.1 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K, e W é um subconjunto não vazio de V; dizemos que W é um subespaço de V se:

1) $0 \in W$
2) quaisquer que sejam $u, v \in W$, então $u + v \in W$
3) se $a \in K$ e $v \in W$, então $av \in W$.

Vemos assim que um subespaço vetorial de V é um subconjunto de V fechado em relação à operação de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar. Observe que V é um subespaço vetorial de si próprio e que o conjunto formado pelo vetor 0 é também um subespaço de V.

LEMA 1.3.2 - Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se e sòmente se, $\forall v_1, v_2 \in W$ e $\forall k_1, k_2 \in K$, então $k_1v_1 + k_2v_2 \in W$.

Demonstração: Com efeito, se W é um subespaço então como $v_1, v_2 \in W$, segue-se que $k_1v_1, k_2v_2 \in W$; mas então $k_1v_1 + k_2v_2 \in W$. Por outro lado, se $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall v_1, v_2 \in W$, temos que $k_1v_1 + k_2v_2 \in W$; vemos logo que $0 \in W$, pois $0 = 0.v_1 + 0.v_1$ (W é não vazio) e fazendo $k_1 = k_2 = 1$, segue-se que $v_1 + v_2 \in W$; além disso, fazendo $k_2 = 0$, vem que $k_1v_1 \in W$.

EXEMPLOS

1.3.3: Sejam $V = R^2$, $W = \{(x_1, x_2) \in R^2$ tais que ou $(x_1, x_2) = (0,0)$ ou $x_2/x_1 = a$, $x_1 \neq 0$, a constante$\}$. Geomètricamente, W é o conjunto dos pontos sôbre uma mesma reta L passando pela origem e definida por seu coeficiente angular a. É fácil ver que W é um subespaço vetorial de R^2.

1.3.4: Tome V como sendo o espaço vetorial das funções reais de uma variável real e considere $W = \{f: R \to R,\ f$ contínua$\}$. Afirmamos que W é um subespaço vetorial de V. De fato, a função 0 (ou seja, a função $f_0: R \to R$ tal que $f_0(x) = 0, \forall x \in R$) é òbviamente contínua, logo um elemento de W. Por outro lado, a soma de duas funções contínuas é uma função contínua, e o produto de uma função contínua por um número real é uma função contínua, o que conclui a demonstração.

EXERCÍCIOS

1.3.5: Verifique, em detalhe, o Exemplo 1.3.3.

1.3.6: Determine todos os subespaços do R^2.

1.3.7: Ache todos os subespaços do R^3.

EXEMPLOS

1.3.8: Considere o espaço vetorial R^3 e sejam $v_1 = (1,3,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ elementos do R^3. O conjunto $[v_1 v_2] = \{v \in R^3$ tais que $v = av_1+bv_2$, $a,b \in R\}$ é um subespaço vetorial de R^3. Com efeito, se $w_1, w_2 \in [v_1,v_2]$ então $w_1 = a_1v_1 + b_1v_2$ e $w_2 = a_2v_1 + b_2v_2$ e assim $w_1 + w_2 = (a_1+a_2)v_1 + (b_1+b_2)v_2$ e $aw_1 = aa_1v_1 + ab_1v_2$ são elementos de $[v_1,v_2]$. Note que o vetor 0 pertence a $[v_1,v_2]$ pois $0 = 0v_1 + 0v_2$.

1.3.9: Se V é um espaço vetorial sôbre um corpo K, e v_1, v_2 são vetores de V, considere o conjunto $[v_1,v_2] = \{w \in V$ tais que $w = k_1v_1 + k_2v_2$, $k_1, k_2 \in K\}$. É fácil ver que $[v_1,v_2]$ é um subespaço vetorial de V. Êste subespaço é chamado de subespaço gerado por v_1 e v_2.

EXERCÍCIO

1.3.10: Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K, e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores de V. Defina por analogia com 1.3.8 o subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ gerado por

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ e prove que êle é de fato um subespaço. Os elementos de $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ são chamados <u>combinações lineares</u> dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

EXEMPLOS

1.3.11: Considere o espaço vetorial V das funções reais de uma variável real e seja P_n o conjunto dos polinômios a coeficientes reais e de grau $\leq n$, com as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de polinômios por escalares. É fácil ver que P_n é um subespaço vetorial de V.

1.3.12: Em $M(2\times2)$, o espaço vetorial das matrizes 2×2 com coeficientes reais, considere $W=\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tais que $b=0\}$. É imediato verificar que W é um subespaço de $M(2\times2)$.

EXERCÍCIOS

1.3.13: Verifique os detalhes dos Exemplos 1.3.11 e 1.3.12.

1.3.14: Mostre que o conjunto $W = \{f:R \to R$ tais que $f(1) = 0\}$ é um subespaço do espaço vetorial das funções reais de uma variável real.

1.3.15: Verifique quais dos conjuntos abaixo são subespaços do espaço vetorial das funções reais de uma variável real:

$W_1 = \{f:R \to R$ tais que $f(0) = f(1) = 0\}$

$W_2 = \{f: R \to R$ tais que $f(0) = 1\}$

$W_3 = \{f: R \to R$ tais que $\int_0^1 f(t)dt = 0\}$

$W_4 = \{f: R \to R$ tais que $\int_0^1 f(t)dt = 1\}$

EXEMPLOS

1.3.16: Já vimos que as soluções de um sistema linear homogêneo com coeficientes em um corpo K

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

formam um espaço vetorial. É fácil verificar que êste espaço vetorial é um subespaço de K^n.

1.1.17: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K e tome a soma direta $V = V_1 \oplus V_2$ de V_1 e V_2. Considere os subconjuntos W_1 e W_2 de V dados por

$W_1 = \{w \in V_1 \oplus V_2$ tais que $w = (v_1, 0),\ v_1 \in V_1\}$

$W_2 = \{w \in V_1 \oplus V_2$ tais que $w = (0, v_2),\ v_2 \in V_2\}$.

É então fácil verificar que W_1 e W_2 são subespaços de V.

EXERCÍCIOS

1.3.18: Se $V_1 = R_1$, $V_2 = R$, o que é $V_1 \oplus V_2$?

1.3.19: Se $V_1 = R$, $V_2 = R^2$, o que é $V_1 \oplus V_2$? Descreva,

neste caso, geomètricamente, os subespaços W_1 e W_2 definidos em 1.3.17.

Os subespaços de V que são diferentes de V e de 0 são chamados <u>subespaços próprios</u>.

É importante perceber que a união de dois subespaços não é um subespaço; por exemplo se V_1 e V_2 são os subespaços do R^2 gerados por $(1,2)$ e $(-1,1)$ respectivamente então $V_1 \cup V_2$ é o subconjunto do plano formado por duas retas que se interceptam na origem e não é um subespaço, visto que $(1,2)$ e $(-1,1)$ são elementos de $V_1 \cup V_2$ mas $(1,2) + (-1,1)$ não pertence a $V_1 \cup V_2$. O lema seguinte descreve a situação referente à intersecção de subespaços vetoriais:

LEMA 1.3.21 - Se V_1 e V_2 são subespaços vetoriais de V, então $V_1 \cap V_2$ é um subespaço vetorial de V.

<u>Demonstração</u>: Sejam $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$. Devemos provar que $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_1 \cap V_2, \forall k_1, k_2 \in K$. Com efeito, como $v_1, v_2 \in V_1$, temos que $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_1, \forall k_1, k_2 \in K$; de maneira análoga $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_2$ e assim $k_1v_1 + k_2v_2 \in V_1 \cap V_2 \; \forall k_1, k_2 \in K$.



1.4 - Dependência e Independência linear

No Exemplo 1.3.9 os elementos do subespaço $[v_1, v_2]$ gerado por v_1 e v_2 são da forma $k_1v_1 + k_2v_2$, onde $k_1, k_2 \in K$. Dizemos então que êles são combinações lineares de v_1 e v_2. Da mesma maneira, em 1.3.10, os elementos de $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ são combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A definição formal é a seguinte:

DEFINIÇÃO 1.4.1 - Se V é um espaço vetorial sôbre um corpo K, e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores de V, dizemos que $u \in V$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ tais que $u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$.

No espaço R^3, que vetores são combinação linear de $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$? Pela própria definição são os elementos $u \in R^3$ tais que existem $r_1, r_2 \in R$ com $u = r_1v_1 + r_2v_2$; ou seja se $u = (x_1, x_2, x_3)$ devemos ter:

$$(x_1, x_2, x_3) = r_1(1,2,0) + r_2(-1,1,1)$$

ou ainda

$$x_1 = r_1 - r_2$$
$$x_2 = 2r_1 + r_2$$
$$x_3 = r_2 \ .$$

Desta maneira para testar se um vetor $u = (x_1, x_2, x_3)$ combinação linear de v_1 e v_2 é suficiente testar se sistema acima tem ou não solução; por exemplo se = (1,11,3) de:

$$1 = r_1 - r_2$$
$$11 = 2r_1 + r_2$$
$$3 = r_2$$

vemos que $r_2 = 3$, $r_1 = 4$ e enfim, $(1,11,3) = 4(1,2,0) + 3(-1,1,1)$. Por outro lado, dado $v = (1,-1,4)$, vejamos se v é combinação linear de v_1 e v_2; para isso, devemos resolver o sistema

$$1 = r_1 - r_2$$
$$-1 = 2r_1 + r_2$$
$$4 = r_2$$

que não tem solução (por quê?). Assim $v = (1,-1,4)$ não é combinação linear de v_1 e v_2.

EXERCÍCIOS

1.4.2: Verifique se o vetor $(3,5,7) \in R^3$ é combinação linear dos vetores (2,1,3) e (3,-2,2). Interprete geomètricamente.

1.4.3: Escreva o vetor $(1,3) \in R^2$ como combinação linear de (2,5) e (3,7). Interprete geomètricamente.

1.4.4: É possível escrever o vetor $(10,15) \in R^2$ como combinação linear de (2,3) e (4,6)? Por quê? Interpre-

te geomètricamente.

1.4.5: É possível escrever o vetor $(5,2,1) \in R^3$ como combinação linear de $(2,1,4)$, $(3,-2,-1)$ e $(-2,3,4)$? Por quê? Interprete geomètricamente.

1.4.6: É possível escrever o vetor $(0,0) \in R^2$ como combinação linear de $(1,2)$ e $(-1,1)$?

1.4.7: No exercício anterior, mostre que se $(0,0) = r_1(1,2) + r_2(-1,1)$ e $(0,0) = r_1'(1,2) + r_2'(-1,1)$, então $r_1 = r_1'$ e $r_2 = r_2'$. Ou seja, $(0,0)$ se exprime de maneira única, como combinação linear de $(1,2)$ e $(-1,1)$.

1.4.8: Mostre que o vetor $(0,0) \in R^2$ pode ser escrito de duas maneiras distintas como combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(-2,-4)$. Interprete geomètricamente.

1.4.9: Mostre que no espaço vetorial R^2 qualquer vetor pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(5,0)$. Interprete geomètricamente.

1.4.10: Considere mais uma vez o espaço vetorial R^2 e sejam dois vetores $v_1, v_2 \in R^2$. Mostre que se um vetor qualquer do R^2 pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2, então v_1 não pertence ao subespaço gerado por v_2. Interprete geomètricamente êste resultado.

Pela definição de combinação linear, vemos que os

elementos do subespaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são exatamente os vetores que se escrevem como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Podemos mesmo ir mais longe e dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.4.11 - Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. O subespaço $[S]$ gerado por S é o conjunto dos vetores que se escrevem como combinação linear de elementos de S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$ ou seja, se $v \in [S]$, existem vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ e escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ tais que $v = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = \sum_{i=1}^{n} k_iv_i$.

EXEMPLO

1.4.12: Considere P o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais e seja S o subconjunto de P formado pelos polinômios $t^0, t^2, t^4, t^8, \ldots, t^{2i}, \ldots$, i qualquer. Então $[S]$ será constituido pelos polinômios onde t só comparece com a potência par; por exemplo os polinômios $1 + t^4 + 3t^{32} + 9t^{296}$, $11t^{24} + t^{108} - 18t^{1000}$, $1 + t^2 + t^4$, 4, $28 - 2t^2$, são elementos de $[S]$.

Uma observação importante é que o conjunto $[S]$ é de fato um subespaço vetorial. A demonstração de tal fato é um exercício fácil.

DEFINIÇÃO 1.4.13 - Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, são <u>linearmente dependentes</u> se existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onde pelo menos um não é nulo, e tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$. O Exercício 1.4.8 mostra que os vetores $(1,2)$ e $(-2,-4)$ do R^2 são linearmente dependentes; por 1.4.7 o mesmo não acontece com $(1,2)$ e $(-1,1)$.

Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes dizemos, também, que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente.

EXEMPLOS

1.4.14: Dado um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ onde $v_1 = 0$, então os vetores dêste conjunto são linearmente dependentes (por quê?).

1.4.15: Se v é um elemento não nulo de V, então o conjunto formado pelo vetor v não é linearmente dependente.

1.4.16: Considere um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearmente dependente. Mostre que se $S' \subseteq V$ e $S \subseteq S'$ então S' é linearmente dependente.

1.4.17: Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, onde $v_1 = v_2$. Mostre então que S é linearmente dependente.

EXERCÍCIO

1.4.16: Dois vetores v_1, v_2, não nulos de um espaço vetorial V, são linearmente dependentes se e sòmente se um pode ser escrito como múltiplo do outro.

DEFINIÇÃO 1.4.17 - Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são <u>linearmente independentes</u> se não existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, com pelo menos um dêles não nulo, e que façam a soma $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ ser o vetor zero. Uma formulação equivalente é dizer que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes se, dada uma combinação linear nula dos mesmos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$, então forçosamente $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

Ainda outra maneira de interpretar o conceito de dependência e independência linear é introduzindo a noção de "equação vetorial":

DEFINIÇÃO 1.4.18 - Se $v_1, v_2, \ldots, v_n, u$ são elementos de um espaço vetorial sôbre um corpo K, uma <u>equação vetorial</u> em $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e têrmo independente u é uma expressão da forma $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n = u$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$. A lista $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é

uma solução da equação. Se $u = 0$ a equação vetorial diz-se homogênea.

Com esta noção podemos dizer que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes se a única solução da equação vetorial homogênea $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = 0$ é a lista $(0,0,\ldots,0)$. Se a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = 0$ admite soluções diferentes de $(0,0,\ldots,0)$, então dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes.

EXERCÍCIOS

1.4.19: Se $v_1 = (1,3,5)$, $v_2 = (2,-1,3)$ e $v_3 = (-3,2,-4)$ são vetores do R^3, resolva a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ e decida se v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes ou independentes.

1.4.20: Resolva a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = u$ onde $v_1 = (2,3,5)$, $v_2 = (1,2,4)$, $v_3 = (-2,2,3)$ e $u = (10,1,4)$ são vetores do R^3.

EXEMPLOS

1.4.20: Tome o espaço vetorial V das funções reais de uma variável real e considere as funções f_1 e f_2 dadas por $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$ que são linearmente independentes; com efeito, suponha que existem $a_1, a_2 \in R$ tais que $a_1f_1 + a_2f_2 = 0$. Mas isso quer dizer que,

para todo número real t, $a_1e^t + a_2e^{2t} = 0$ e isso implica em particular, que $a_1e + a_2e^2 = 0$ (fazendo $t = 1$) e $a_1 + a_2 = 0$ (fazendo $t = 0$) e a única solução dêste sistema é $a_1 = a_2 = 0$.

1.4.21: Consideremos mais uma vez o espaço P_n formado pelos polinômios reais de grau $\leq n$ e sejam os polinômios $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t, \ldots, p_n(t) = t^n$. Afirmamos que êstes polinômios são linearmente independentes: de fato se $a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_np_n = 0$ (onde 0 é o polinômio idênticamente nulo), segue-se que $a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n = 0$, mas como um polinômio real é idênticamente nulo se e só se seus coeficientes são nulos, vem que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

EXERCÍCIOS

1.4.22: Se $v_1 = (1,2) \in R^2$, ache um vetor $v_2 \in R^2$ tal que v_1 e v_2 sejam linearmente independentes.

1.4.23: Se $v_1 = (1,1,1) \in R^3$, ache um vetor $v_2 \in R^3$ tal que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

1.4.24: Tome os vetores $v_1, v_2 \in R^3$ do Exercício 1.4.23 e ache um vetor $v_3 \in R^3$ tal que v_1, v_2 e v_3 sejam linearmente independentes.

1.4.25: Se $v_1, v_2 \in R^2$ são os vetores do Exercício 1.4.22, prove que é impossível encontrar um vetor $v_3 \in R^2$

tal que v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes.

1.4.26: Tome os vetores $v_1, v_2, v_3 \in R^3$ do Exercício 1.4.24 e demonstre que é impossível encontrar um vetor $v_4 \in R^3$ tal que v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

1.4.27: Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios reais de grau $\leq n$. Mostre que é possível encontrar um polinômio $p_1(t)$ tal que os polinômios 1 e $p_1(t)$ são linearmente independentes.

1.4.28: Mostre que existem em P_n polinômios $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t), \ldots, p_n(t)$ tais que para $i=1,2,\ldots,n$, os polinômios $1, p_1(t), \ldots, p_n(t)$ são linearmente independentes.

1.4.29: Mostre que em R^2 é impossível encontrar três vetores linearmente independentes.

1.4.30: Mostre quo em R^3 é impossível encontrar quatro vetores linearmente independentes.

1.4.31: Mostre que em P_n é impossível encontrar $(n+2)$ vetores linearmente independentes.

1.4.32: Se P é o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais, demonstre que existem polinômios $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, tais que $p_0, p_1, \ldots, p_i$ são linoarmonte independentes, qualquer que seja i.

DEFINIÇÃO 1.4.33 - Um conjunto finito $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ onde $v_i \in V$, $i=1,\ldots,n$ é <u>linearmente independente maximal</u> se:

1) os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes
2) qualquer que seja o vetor $v \in V$, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ são linearmente dependentes.

EXERCÍCIOS

1.4.34: Exiba em R^2, um conjunto que não é linearmente independente maximal e um que é linearmente independente maximal.

1.4.35: Encontre no R^3, um conjunto que não é linearmente independente maximal e um que é linearmente independente maximal.

1.4.36: Mesmas perguntas para o espaço vetorial P_n.

EXEMPLO

1.4.37: Os exercícios anteriores mostram que R^2, R^3 e P_n possuem conjuntos linearmente independentes maximais. Tal não acontece com P, o espaço vetorial de todos os polinômios a coeficientes reais. Com efeito, se S é um conjunto linearmente independente maximal de vetores de P, seja N = máximo grau $p_i(t)$ onde $p_i(t) \in S$. Tome um polinômio de grau $N+1$; seja $p(t)$ êste polinômio. O conjunto S' cujos elementos são os elementos de S e o

polinômio $p(t)$ é formado por vetores linearmente independentes (por quê?) e como S está estritamente contido em S', não é maximal, uma contradição.

1.5 - Espaços vetoriais de dimensão finita - bases

DEFINIÇÃO 1.5.1 - Um espaço vetorial V sôbro um corpo K é dito de dimensão finita se existe um inteiro positivo N tal que dados $N+1$ vetores quaisquer do espaço êles são linearmente dependentes.

É fácil ver que esta definição é equivalente a dizer que existe N tal que qualquer conjunto com N ou mais elementos é linearmente dependente. ?

Os exemplos e exercícios do §1.4 mostram, por exemplo, que os espaços vetoriais R^2, R^3 e P_n são de dimensão finita, mas o mesmo não acontece com o espaço P.

EXERCÍCIOS

1.5.2: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e W é um subespaço vetorial de V, então W é de dimensão finita.

1.5.3: Mostre que o espaço vetorial das funções reais de uma variável real não é de dimensão finita.

1.5.4: Seja V um espaço vetorial e $v \in V$. Mostre que o subespaço gerado por v, $[v]$, é de dimensão finita.

LEMA 1.5.5 - Em um espaço vetorial V de dimensão finita, existem conjuntos linearmente independentes maximais.

Demonstração: Seja N o inteiro referido na Definição 1.5.1. Tome $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$. O conjunto formado por v_1 é linearmente independente; se êle fôr maximal, a demonstração está concluida; se não, seja $v_2 \in V$, tal que os vetores v_1, v_2 sejam linearmente independentes. Considere agora o conjunto $\{v_1, v_2\}$; se fôr linearmente independente maximal, a demonstração está concluida; se não, existe $v_3 \in V$ tal que os vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes. Continuando com êste processo, chegaremos a um vetor v_n tal que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes mas $\forall v \in V$, $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ serão linearmente dependentes (por quê? use a Definição 1.5.1) Então, o conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ será linearmente independente maximal.

DEFINIÇÃO 1.5.6 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K. Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formam uma base finita para V sôbre K se o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente maximal. Ou seja, base é outra denominação para um conjunto linearmente independente maximal.

Sempre que empregarmos a palavra base, fica desde já convencionado quo queremos dizer base finita.

LEMA 1.5.7 - Todo espaço vetorial de dimensão finita tem uma base finita.

Demonstração: É uma conseqüência trivial de 1.5.5.

EXERCÍCIOS

1.5.8: Dê uma base para o espaço vetorial R^2.

1.5.9: Mesma pergunta para os espaços R^3 e P_n.

1.5.10: Mostre que o vetor O não pode ser elemento de uma base e que uma base não pode ter dois vetores iguais.

1.5.11: Dê duas bases distintas para os espaços R^2, R^3 e P_n.

O nosso objetivo agora é demonstrar que, se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, então qualquer outra base terá também n elementos; assim, o número de elementos que aparecem em uma base é um invariante numérico de V. Antes, no entanto, veremos alguns resultados também importantes:

LEMA 1.5.12 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K e $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ uma base de V. Então, $V = [v_1,v_2,\ldots,v_n]$, ou seja, V é o espaço gerado pelos vetores $v_1,v_2,\ldots,v_n$.

Demonstração: Se $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, nada há a demonstrar. Suponhamos, portanto, que $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ está estritamente contido em V, e seja $v \in V$ tal que $v \notin [v_1, v_2, \ldots, v_n]$. Afirmamos então que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente. Com efeito, seja a equação vetorial $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + bv = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + bv = 0$ e suponhamos que ela tenha uma solução diferente de $(0, 0, \ldots, 0)$; então $b \neq 0$ (por quê? o que é uma base?); mas assim

$$v = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \ldots - \frac{a_n}{b} v_n$$

e portanto $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, contradição.

Êste resultado mostra que os vetores de uma base são vetores linearmente independentes que geram o espaço. A recíproca é válida, e demonstrada a seguir.

LEMA 1.5.13 - Se V é um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são vetores linearmente independentes que geram V, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formam uma base para V.

Demonstração: Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ não é linearmente independente maximal; então existe $v \in V$ tal que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ são linearmente independentes; logo v não é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (por quê?) e assim $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não geram V, contradição.

De maneira que as bases de um espaço vetorial V são exatamente os conjuntos de vetores linearmente independentes que geram V.

Uma das razões que tornam as bases importantes é a seguinte:

TEOREMA 1.5.14 - Se V é um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formam uma base para V, então, dado um vetor arbitrário $v \in V$, v escreve-se de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Demonstração: Já sabemos que $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$. Assim, dado $v \in V$, existem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$. Suponha então que existam $k_1', k_2', \ldots, k_n' \in K$ com $v = \sum_{i=1}^{n} k_i' v_i$ onde, para algum $1 \leq i \leq n$, $k_i \neq k_i'$; vemos assim que $0 = v - v = \Sigma(k_i - k_i')v_i$ e como os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, concluimos que, para todo $i, 1 \leq i \leq n$, $k_i = k_i'$.

Podemos agora demonstrar que o número de elementos de uma base qualquer de V é constante.

TEOREMA 1.5.15 - Duas bases quaisquer $v_1, v_2, \ldots, v_s$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de um espaço vetorial V têm o mesmo número de elementos, isto é, $s = n$.

OBSERVAÇÃO: Sentimo-nos tentados a fazer a seguinte demonstração: por definição as duas bases são

conjuntos linearmente independentes maximais logo $s = n$, mas êste raciocínio é falso; com efeito, se $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ o fato de que tanto S_1 como S_2 são maximais quer dizer que, se S_1' e S_2' são subconjuntos de V que contêm pròpriamente S_1 e S_2, então S_1' e S_2' são linearmente dependentes, mas não há implicação nenhuma sôbre o número de elementos de S_1 e S_2. Passamos, agora, a uma demonstração correta:

Demonstração: Considere o conjunto $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e observe que êle é linearmente dependente, pois $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente maximal. Note que $\{v_1\}$ é linearmente independente. Relativamente ao conjunto $\{v_1, u_1\}$, duas coisas podem ocorrer: ou v_1, u_1 são linearmente independentes, ou v_1, u_1 são linearmente dependentes. Se v_1, u_1 são linearmente independentes, formemos o conjunto $\{v_1, u_1, u_2\}$ e novamente as duas hipóteses podem ocorrer. Prossigamos desta maneira enquanto obtivermos conjuntos de vetores linearmente independentes e seja u_i o primeiro vetor para o qual o conjunto $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ não é linearmente independente, isto é, $\{v_1, u_1\}$, $\{v_1, u_1, u_2\}$, $\{v_1, u_1, u_2, u_3\}, \ldots, \{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}\}$ são linearmente independentes mas $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ não é (note que $i \geq 1$, se $i=1$ ponha $u_0 = v_1$).

Como $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ é linearmente dependente, a equação vetorial homogênea $y_0v_1 + y_1u_1 + \ldots + y_iu_i = 0$ tem pelo menos uma solução não trivial. Nesta solução, o coeficiente y_i é não nulo (por quê? os vetoree $v_1, u_1, u_2, \ldots, u_i$ são linearmente dependentes ou independentes?) e aseim temos que:

$$u_i = -\frac{y_0}{y_i} v_1 - \frac{y_1}{y_i} u_1 - \ldots - \frac{y_{i-1}}{y_i} u_{i-1}$$

ou seja, u_i é uma combinação linear de $v_1, u_1, \ldots, u_{i-1}$.

Afirmamos então que $v_1, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n$ geram V. Com efeito, se $v \in V$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_y u_j = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n ,$$

mas

$$u_i = -\frac{y_0}{y_i} v_1 - \frac{y_1}{y_i} u_1 - \ldots - \frac{y_{i-1}}{y_i} u_{i-1}$$

de maneira que

$$v = \sum_{j=1}^{i-1} x_ju_j + x_i \{\sum_{\ell=1}^{i-1} (\frac{y_\ell}{y_i})u_\ell - \frac{y_0}{y_i} v_1\} + \sum_{j=i+1}^{n} x_ju_j$$

e mostramos que v é uma combinação linear de $v_1, u_1, \ldots$ $\ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ conforme desejado.

Agora, a partir de $\{v_1, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$

formemos o conjunto $\{v_2,v_1,u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n\}$ e apliquemos a êle o mesmo raciocínio; obtemos, assim, após retirar dentre os vetores $v_2,v_1,u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n$ o primeiro que é combinação linear dos precedentes, um conjunto do tipo $\{v_2,v_1,u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n\}$ onde $k \geq 1$ (se $k=1$, ponha $u_{k-1} = v_1$) e que gera V. Êste processo pode ser repetido até obtermos um conjunto da forma

$$\{v_s,v_{s-1},\ldots,v_2,v_1,u_{\alpha(1)},u_{\alpha(2)},\ldots,u_{\alpha(s)}\}$$

onde $\alpha(1),\alpha(2),\ldots,\alpha(s)$ são inteiros e $1 \leq \alpha(1) < < \alpha(2) \ldots < \alpha(s) \leq n$. Mas então $s \leq n$ (por quê?).

Invertendo agora os papéis de $\{u_1,\ldots,u_n\}$ e $\{v_1,v_2,\ldots,v_s\}$ obtemos, de maneira análoga, que $n \leq s$. Logo $n = s$.

Um exame atento da demonstração de 1.5.15 mostrará que o realmente demonstrado (duas vêzes) foi o seguinte:

LEMA 1.5.16 - Se $v_1,v_2,\ldots,v_n$ são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V, gerado pelos vetoros $u_1,u_2,\ldots,u_s$, então $n \leq s$.

Já vimos que os espaços vetoriais de dimensão finita admitem sempre uma base (finita!). Podemos também demonstrar que se V admite uma base é de dimensão finita: com efeito, dada uma base de V com s elementos, 1.5.16

mostra imodiatamente que qualquer conjunto linearmente independente de V tem no máximo s elementos, logo V é de dimensão finita, e fica assim demonstrado o teorema abaixo:

TEOREMA 1.5.17 - Um espaço vetorial V tem dimensão finita se e só se admite uma base finita.

Outro fato é a seguinte conseqüência trivial da definição de base mas que, por sua utilidade, merece destaque:

LEMA 1.5.18 - Se $v_1, v_2, \ldots, v_s$ são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V de dimensão finita, podemos então encontrar vetores $v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n$ de V tais que $v_1, v_2, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n$ constituem uma base para V.

EXERCÍCIOS

1.5.19: Demonstre o Lema 1.5.18.

1.5.20: Seja $V = R^3$ e a base dada por $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ e $u_3 = (0,0,1)$; considere o subespaço W gerado pelo vetor $w = (1,1,1)$. Há algum vetor da base u_1, u_2, u_3 no subespaço W?

O exercício acima mostra que, dada uma base de V e um subespaço W de V, não se segue forçosamente que algum vetor da base pertença a W. Temos, no entanto o se

guinte resultado:

LEMA 1.5.21 - Se W é um subespaço de um espaço vetorial V, e $u_1,u_2,\dots,u_s$ uma base de W, então existem vetores $u_{s+1},\dots,u_n \in V$ tais que $u_1,u_2,\dots,u_s$, $u_{s+1},\dots,u_n$ formam uma base de V.

EXERCÍCIOS

1.5.22: Demonstre o Lema 1.5.21 (use 1.5.18).

1.5.23: Se V_1 e V_2 são espaços vetoriais e $\beta = \{v_1,v_2,\dots,v_s\}$, $\beta' = \{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ são bases de V_1 e V_2 respectivamente, mostre que $\beta \oplus \beta' = \{(v_1,0),(v_2,0),\dots,(v_s,0),(0,u_1),\dots,(0,u_n)\}$ é uma base para $V_1 \oplus V_2$.

Já mostramos que duas bases quaisquer de um espaço vetorial possuem o mesmo número de elementos. Por outro lado, espaços vetoriais de dimensão finita sempre têm bases. A seguinte definição faz, portanto, sentido:

DEFINIÇÃO 1.5.24 - Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. A dimensão de V (sôbre K) é o número de vetores de uma base qualquer de V sôbre K. Se V não é de dimensão finita diremos que V tem dimensão infinita.

EXERCÍCIOS

1.5.25: Dê um espaço vetorial de dimensão infinita.

1.5.26: Se V_1, tem dimensão s e V_2 dimensão n, qual a dimensão de $V_1 \oplus V_2$?

LEMA 1.5.27 - Se a dimensão de V é n e os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram V então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ constituem uma base para V.

Demonstração: Já sabemos que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geram V e são linearmente independentes formam uma base para V. Suponhamos, por absurdo, que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não são linearmente independentes. É então verdade que um dos vetores $v_2, \ldots, v_n$ é combinação linear dos que o precedem (por quê?). Seja v_i o primeiro vetor que é combinação linear dos precedentes. Como na demonstração de 1.5.15, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ gera V. Se êste conjunto não é linearmente independente, repitamos o processo. Eventualmente, chegaremos a um conjunto formado por vetores linearmente independentes que geram V. O número de elementos dêste conjunto será estritamente menor que n, uma contradição.

LEMA 1.5.28 - Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes então formam uma base para V.

Demonstração: Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não formam uma base para V, como uma base é um conjunto linearmente

independente maximal, vem que existe $v_{n+1} \in V$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ são linearmente independentes, mas isso contradiz o Lema 1.5.16.

EXERCÍCIO

1.5.29: Seja $V = R^3$ e W o subespaço gerado por $(1,1,4)$.

A partir da base de W formada por $(1,1,4)$ ache uma base para R^3.

CAPÍTULO 2

TRANSFORMAÇÕES DO PLANO

2.1 - Funções ou transformações

DEFINIÇÃO 2.1.1 - Dados dois conjuntos A e B, uma *função* de A em B é uma lei de correspondência (uma regra) que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in B$. O conjunto A é chamado *domínio* da função f e B *contra-domínio* de f. As funções são também chamadas de *aplicações* ou *transformações*.

EXEMPLOS

2.1.2: Seja A o conjunto dos números reais, B também o conjunto dos reais e $f:A \to B$ dada por $f(x) = x^2$, $\forall x \in A$; ou seja, f é a função que a cada número real associa o seu quadrado.

2.1.3: Tomemos A como sendo o plano R^2, onde escolhemos um ponto fixo O. Seja B o conjunto dos números reais e $f:A \to B$ a função tal que $f(P)$ = distância de O a P, $\forall P \in A$.

2.1.4: Seja f a função que a cada ponto do globo terrestre associa, em um certo momento fixo, a sua tempe-

ratura e pressão atmosférica. Se fixarmos unidades para a medida da temperatura e pressão, f será uma função cujo domínio é o conjunto dos pontos da superfície terrestre e cujo contra-domínio será o conjunto dos pares ordenados de números reais.

2.1.5: Dado um conjunto A qualquer, temos a <u>função identidade</u> em A: é a função 1_A cujo domínio é A, o contra-domínio também é A e tal que $i_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

2.1.6: Se A e B são conjuntos, e $p \in B$, temos a função constante de valor p, f_p: é a função de domínio A, contra-domínio B e tal que $f_p(x) = p$, $\forall x \in A$.

DEFINIÇÃO 2.1.7 - Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se $A = C$, $B = D$ e $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.

EXEMPLO

2.1.8: Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = x^2$.

Se $R^+ = \{x \in R \text{ t.q. } x \geq 0\}$, seja $g: R \to R^+$ dada por $g(x) = x^2$. Vemos, por nossa definição, que a <u>função f é diferente da função g</u>.

DEFINIÇÃO 2.1.9 - Dada uma função $f: A \to B$ e $x \in A$, dizemos que o ponto $f(x) \in B$ é a <u>imagem</u>, por f, do ponto x. O <u>conjunto de valores</u> de f é o subconjunto de B formado pelos pontos que são imagens, por

', dos pontos de A: $\{y \in B | \exists\ x \in A$ com $f(x) = y\}$. Da-
lo um subconjunto C de A diremos que sua imagem pela
aplicação f é o conjunto $f(C) = \{y \in B | \exists\ x \in C$ com $f(x)=y\}$.
Assim, $f(A)$ é o conjunto dos valores de f.

EXEMPLO

2.1.10: Tome $f:R \to R$ dada por $f(x) = x^2$, $\forall x \in R$; então o conjunto de valores de f é R^+.

Dada uma função $f:A \to B$, denotamos também que $y = f(x)$ por $x \mapsto y$. Assim a função do Exemplo 2.1.10 fica caracterizada por sua lei de correspondência $x \mapsto x^2$.

DEFINIÇÃO 2.1.11 - Uma função $f:A \to B$ é injetora se, $\forall\, x,y \in A$, $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.

Ou seja, uma função injetora transforma pontos distintos em pontos distintos.

EXERCÍCIOS

2.1.12: Dê um exemplo de uma função injetora.

2.1.13: Dê um exemplo de uma função que não é injetora.

2.1.14: Mostre que uma função $f:A \to B$ é injetora se e sòmente se, dados $x,y \in A$, $f(x) = f(y)$ acarreta que $x = y$.

DEFINIÇÃO 2.1.15 - Uma função $f:A \to B$ é sobrejetora se o conjunto de valores de f é igual a B; ou seja, se $\forall y \in B$, $\exists\ x \in A$ tal que $x \mapsto y$.

A função $f:R \to R$ dada por $x \mapsto x^2$ não é sobrejetora. A função identidade $1_A:A \to A$ é sempre sobrejetora (e também injetora). Uma função que é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora recebe um nome especial:

DEFINIÇÃO 2.1.16 - Uma função $f:A \to B$ é bijetora se é injetora o sobrejetora.

Se $f:A \to B$ é bijetora, então, dado $y \in B$, arbitrário, existe um e sòmente um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

EXEMPLOS

2.1.17: Sejam $A = B = R^2$ e $f:R^2 \to R^2$ dada por $(x,y) \mapsto (\text{sen } x, \cos y)$. Então f não é injetora pois $f(x,y) = f(x+2K\pi, y+2K\pi)$ onde K é um inteiro qualquer; por outro lado, f também não é sobrejetora, pois note que $|(\text{sen } x, \cos y)| \leq 1$ portanto o conjunto de valores de f está contido na circunferência com centro na origem e raio 1.

2.1.17: Considere a função $f:R^2 \to R$ dada por $(x,y) \mapsto x+y$. Esta função é sobrejetora (demonstre isso) mas não é injetora (por quê?).

2.1.18: Se $f:R^2 \to R^3$ é a função $(x,y) \mapsto (1,x,2y)$, então f é injetora; com efeito, se $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, então $(1,x_1,2y_1) = (1,x_2,2y_2)$ logo $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. No entanto, f não é sôbre: o ponto $(2,3,5)$ não é imagem,

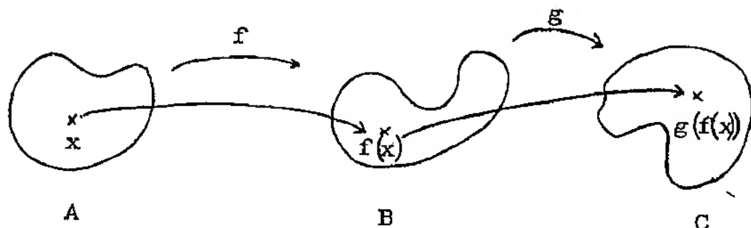
por f, de nenhum ponto do R^2 (Obs.: sôbre = sobrejetora).

2.1.19: Seja $f: R^2 \to R^2$ dada por $(x,y) \mapsto (2x+5, 3y+2)$.

Esta função é bijetora. Com efeito, se $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, então $(2x_1+5, 3y_1+2) = (2x_2+5, 3y_2+2)$ e assim $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, e dado $(a,b) \in R^2$, o ponto $(x_o,y_o) \in R^2$ tal que $x_o = \frac{a-5}{2}$, $y_o = \frac{b-2}{3}$ goza da propriedade de que $f(x_o,y_o) = (a,b)$.

DEFINIÇÃO 2.1.20 - Sejam $f: A \to B$, $g: B \to C$ funções. A <u>composta</u> de f com g, $g \circ f$, é a função de domínio A e contra-domínio C definida por $x \mapsto g(f(x))$, $\forall x \in A$; ou seja $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

A fim de poder compor duas funções $f: A \to B$, $g: C \to D$, exigimos que $B = C$, ou seja, o contra-domínio da primeira deve ser igual ao domínio da segunda. A operação de compor funções pode ser melhor entendida com o auxílio da figura:



EXEMPLOS

2.1.21: Se $f: R \to R$ e $g: R \to R^2$ são dadas por $f(x) = x+5$, $g(x) = (x, e^x)$ então $f \circ g: R \to R^2$ é dada

por $x \longmapsto (x+5, e^{x+5})$.

2.1.22: Sejam $f:R \to R$, $g:R \to R$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x + \cos x$, então $(g \cdot f):R \to R$ é dada por $x \longmapsto x^2 + \cos (x^2)$, enquanto $f \cdot g:R \to R$ será dada por $x \longmapsto (x + \cos x)^2$.

É fácil ver que se $f:A \to B$, $g:B \to C$ e $h:C \to D$ são funções, então $h(g \cdot h) = (h \cdot g)f$. (A composição de funções é associativa).

EXEMPLO

2.1.23: Se $T, S:R^2 \to R^2$ são dadas por $T(x,y) = (\cos x, \text{sen } y)$ e $S(x,y) = (e^x, y)$, então $(T.S)(x,y) = (\cos e^x, \text{sen } y)$ e $(S.T)(x,y) = (e^{\cos x}, \text{sen} y)$ vemos assim que $T.S \neq S.T$. (A composição de funções não é, em geral, comutativa).

LEMA 2.1.24 - Se $f:A \to B$ é uma transformação sobrejetora, então existe $g:B \to A$ tál que $f \cdot g = 1_B$. Dizemos que g é uma <u>inversa à direita de</u> f.

<u>Demonstração</u>: Sabemos, como f é sôbre, que $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. Então, dado y em B, defina $g:B \to A$ por $g(y) = x$, onde x é tal que $f(x) = y$ e é imediato ver que $f \cdot g = 1_B$.

EXERCÍCIO

2.1.25: Mostre que, se $f:A \to B$ é sobrejetora mas não é

injetora, então existem pelo menos duas funções diferentes $g_1, g_2: B \to A$ tais que $f \cdot g_1 = f \cdot g_2 \neq 1_B$.

LEMA 2.1.26 - Se $f: A \to B$ é uma transformação injetora, então existe $g: B \to A$ tal que $g \cdot f = 1_A$.

A função g é chamada de uma <u>inversa à esquerda de</u> f.

<u>Demonstração</u>: Seja $C \subseteq B$ a imagem de f. Então, se $x \in B$, ou $x \in C$, ou $x \notin C$; caso $x \in C$, existe um único $z \in A$ tal que $f(z) = x$. Definiremos $g: B \to A$ como segue:

$$g(x) = \begin{cases} z \quad \text{onde} \quad f(z) = x, \text{ se } \quad x \in C \\ z_o, \; z_o \quad \text{fixo em} \quad A, \text{ se } \quad x \notin C. \end{cases}$$

Então $g \cdot f(z) = g(f(z)) = z$, como é imediato verificar, para todo $z \in A$.

EXERCÍCIOS

2.1.27: Mostre que se A tem mais de um ponto e $f: A \to B$ é injetora mas não é sobrejetora, então existem pelo menos duas funções $g_1, g_2: B \to A$, distintas, tais que $g_1 \cdot f = g_2 \cdot f = 1_A$.

2.1.28: Seja $f: A \to B$ uma função. Prove que, se existe $g: B \to A$ tal que $f \cdot g = 1_B$, então f é sobrejetora.

2.1.29: Se $f:A \to B$ é uma função e existe $g:B \to A$ tal que $g \cdot f = 1_A$, então f é injetora.

É fácil ver que há funções injetoras que não são sobrejetoras e funções sobrejetoras que não são injetoras, e portanto há funções que possuem sòmente inversas à direita ou sòmente inversas à esquerda. As funções que possuem inversa à direita e à esquerda levam um nome especial:

DEFINIÇÃO 2.1.30 - Uma função $f:A \to B$ é <u>inversível</u> se existe $g:B \to A$ tal que $f \cdot g = 1_B$ e $g \cdot f = 1_A$. (Ou seja, g é uma <u>inversa à direita de</u> f e também uma <u>inversa à esquerda de</u> f). A função g é dita ser uma <u>inversa</u> de f. Observe que se f é inversível, então f é injetora e sobrejetora, logo bijetora (isso se segue de 2.1.28 e 2.1.29). A recíproca é verdadeira:

LEMA 2.1.31 - Se f é sobrejetora e injetora, então f é inversível.

<u>Demonstração</u>: Mostraremos que se $f:A \to B$ possui uma inversa à direita $g:B \to A$ e uma inversa à esquerda $h:B \to A$, então $g = h$; com efeito, sabemos que $f \cdot g = 1_B$ e $f \cdot g = 1_A$, logo $h \cdot (f \cdot g) = h \cdot 1_B$, assim $(h \cdot f) \cdot g = h$ e $1_A \cdot g = g = h$.

Se a função $f:A \to B$ tem uma inversa g (ou seja

$g:B \to A$ tal que $f \cdot g = 1_B$, $g \cdot f = 1_A$), então g é única, o que é uma conseqüência trivial de 2.1.31. Podemos, portanto dizer que g é a inversa de f, e denotá-la por f^{-1}.

EXERCÍCIOS

2.1.32: Se $f:A \to B$ é inversível com inversa $f^{-1}:B \to A$, mostre que a função f^{-1} é inversível e que sua inversa é f.

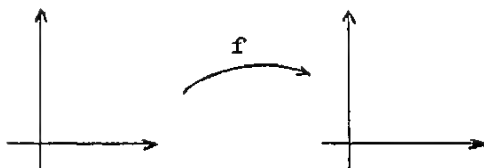
2.1.33: Mostre que se $f:A \to B$, $g:B \to C$ são funções inversíveis, então $g \cdot f$ será inversível e $(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$.

2.1.34: Seja $R^{++} = \{x \in R | \ x > 0\}$ e considere as funções $f:R \to R^{++}$ e $g:R^{++} \to R$ dadas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ell nx$. Mostre que f é inversível e que g é a inversa para f.

2.2 - Transformações do plano

Particularizamos, agora, o nosso estudo das funções.

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Uma transformação do plano é uma função f cujos domínio e contra-domínio são iguais ao R^2.



EXERCÍCIOS

2.2.2: Se $f:R^2 \to R^2$ é uma transformação do plano, o que significa:

a) f é sobrejetora?

b) f é injetora?

c) f é inversível?

2.2.3: Seja $f:R^2 \to R^2$ dada por $(x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$; esta função é sobrejetora? é injetora?

2.2.4: Considere $f:R^2 \to R^2$ dada por $f(x,y) = (2x+y, 3x-4y)$. Será f injetora? e sobrejetora?

2.2.5: Seja ainda $f:R^2 \to R^2$ dada por $f(x,y) = (2x+y, 3x-4y)$. Qual o ponto $f(1,0)$? Qual o ponto $f(0,1)$? mostre que $f(5,1) = 5.f(1,0) + 1.f(0,1)$.

2.2.6: Se $f:R^2 \to R^2$ é dada por $(x,y) \mapsto (2x, 3y+x)$, ache $f(3,1)$, $f(5,2)$, $f(4,3)$, $f(-7,1)$, $f(1,0)$ e $f(0,1)$ e, para cada um dos quatro primeiros casos, ache a e b tais que $f(x,y) = a\, f(1,0) + b(0,1)$.

2.2.7: Considere a transformação do plano dada por $f(x,y) = (x+5, y+7)$ e mostre que ela é inversível.

Ache sua inversa. Ache $f(0,0)$. Seja L a reta $y = 2x$. Se $p \in L$, calcule $f(p)$. Se $p \in L$, qual o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$? Se $C=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=1\}$, ache o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$ onde $p \in C$.

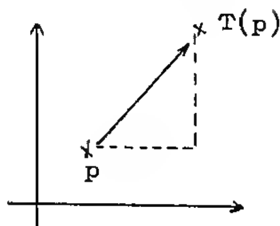
2.2.8: Seja $f: R^2 \to R^2$ dada por $(x,y) \longmapsto (x-y,x+y)$ e calcule o lugar geométrico dos pontos da forma $f(p)$, onde $p \in \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Ache a imagem por f de uma reta passando pela origem. Ache a imagem, por f, de uma reta qualquer.

Passaremos, agora, a estudar vários tipos importantes de transformações do plano. De agora em diante, os pontos do plano serão denotados também por matrizes colunas 2x1; escrevemos por exemplo, o ponto $p = \binom{x}{y}$.

DEFINIÇÃO 2.2.9 - Uma <u>translação</u> T do plano é a transformação do plano dada por $T\binom{x}{y} = \binom{x+a}{y+b}$ a e b números reais, os quais são chamados de parâmetros da translação. O Exercício 2.2.7 já apresentou um exemplo de translação.

Uma translação fica perfeitamente determinada se conhecemos seus parâmetros a e b. É fácil ver que uma translação é inversível e sua inversa é uma translação (quais são os parâmetros da inversa?). O seguinte resul-

tado é também de fácil verificação:



LEMA 2.2.10 - Se $T:R^2 \to R^2$ é uma translação, então $\forall p,q \in R^2$, $d(p,q) = d(T(p),T(q))$; se L e S são duas retas, suas imagens por T são retas e o ângulo entre as imagens é igual ao ângulo entre L e S. Em particular retas paralelas são transformadas em retas paralelas. Dado um polígono do plano, sua área é preservada por T.

Um outro tipo importante de transformação do plano é o seguinte:

DEFINIÇÃO 2.2.11 - Uma rotação R_Θ do plano é a transformação dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \cos \Theta - y \operatorname{sen} \Theta \\ x \operatorname{sen} \Theta + y \cos \Theta \end{pmatrix} .$$

O parâmetro Θ é chamado o ângulo da rotação, e uma rotação de ângulo Θ é denotada por R_Θ.

Observe que, usando a notação matricial, podemos escrever a expressão para R_Θ como

$$R_\theta\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

de maneira que se p tem coordenadas $\binom{x}{y}$ as coordenadas de $R_\theta(p)$ são achadas multiplicando as matrizes acima. Dizemos que $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ é a matriz de R_θ.

Os seguintes fatos são de fácil verificações:

LEMA 2.2.12 - Dadas duas rotações R_{θ_1}, R_{θ_2} então

$$R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2} = R_{\theta_2}\cdot R_{\theta_1} = R_{(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{e} \quad R_\theta = I.$$

Uma conseqüência imediata de 2.2.12 é que as rotações são inversíveis e a inversa de R_θ é $R_{(-\theta)}$; com efeito, pelo lema, $R_\theta\cdot R_{(-\theta)} = R_{(-\theta)}\cdot R_{(\theta)} = I$, o que demonstra nossa afirmação.

EXERCICIOS

2.2.13: Mostre que uma rotação transforma retas em retas e círculos em círculos.

2.2.14: Dadas duas retas L_1 e L_2 que fazem entre si um ângulo α, mostre que suas imagens por uma rotação fazem entre si o ângulo α.

2.2.15: Seja C a curva definida por $2xy = a^2$. Se $p\in C$, qual o lugar geométrico dos pontos $R_{(-\pi/4)}(p)$?

Já vimos que $R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2} = R_{(\theta_1+\theta_2)}$ e note também que

$$\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1\\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2\\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

de maneira que para achar a composta de duas rotações é suficiente multiplicar suas matrizes.

Em geral, dada uma matriz arbitrária 2x2, $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ela define sempre uma transformação T do plano dada por

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

EXEMPLO

2.2.16: Tome a matriz $A = \begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ e considere a transformação T_A. Então,

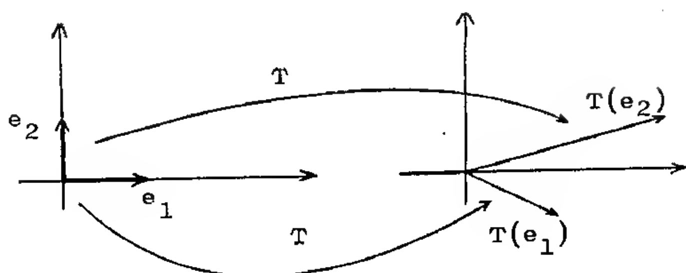
$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+5y\\ -x+2y\end{pmatrix}.$$

Em particular, $T_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ e $T_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, ou seja, a primeira coluna da matriz A dá as coordenadas do transformado do primeiro vetor da base $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ do plano. Anàlogamente, a segunda coluna da matriz A dá as coordenadas de $T_A(e_2)$. Observe, também, que

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+5y\\ -x+2y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = xT_A(e_1) + yT_A(e_2).$$

Desta maneira, o valor de T_A para um vetor qualquer $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ do plano fica perfeitamente determinado pelos

valores de T_A nos vetores $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$.



Em verdade, se v_1 e v_2 são vetores do plano, então $T_A(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1T_A(v_1) + r_2T_A(v_2)$. Com efeito, se

$$v_1 = \binom{x_1}{y_1},\quad v_2 = \binom{x_2}{y_2},\quad T_A(v_1) = \binom{2x_1+5y_1}{-x_1+2y_1},\quad T_A(v_2) = \binom{2x_2+5y_2}{-x_2+2y_2}$$

Por outro lado,

$$T_A(r_1v_1 + r_2v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1x_1 + r_2x_2 \\ r_1y_1 + r_2y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2r_1x_1 + 2r_2x_2 + 5r_1y_1 + 5r_2y_2 \\ -r_1x_1 - r_2x_2 + 2r_1y_1 + 2r_2y_2 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} 2x_1 + 5y_1 \\ -x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \quad r_2\begin{pmatrix} 2x_2 + 5y_2 \\ -x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} = r_1T_A(v_1) + r_2T_A(v_2)\ .$$

Uma transformação $T:R^2 \to R^2$ que satisfaz a equação $T(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1T(v_1) + r_2T(v_2)$ diz-se <u>linear</u>. Acabamos de ver que a transformação do plano induzida por uma matriz A 2×2 é linear. A recíproca também é verdadeira, como demonstrado a seguir:

TEOREMA 2.2.17 - Seja $T:R^2 \to R^2$ uma função tal que, $\forall r_1, r_2 \in R$, $v_1, v_2 \in R^2$, $T(r_1v_1+r_2v_2) = r_1T(v_1) + r_2T(v_2)$. Então, se $T\binom{1}{0} = \binom{a_1}{a_2}$, $T\binom{0}{1} = \binom{b_1}{b_2}$, temos que

$$T\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}, \quad \forall \binom{x}{y} \in R^2.$$

Domonstração: Com efeito $\binom{x}{y} = x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}$ de maneira que $T\binom{x}{y} = T(x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}) = xT\binom{1}{0} + yT\binom{0}{1} = x\binom{a_1}{a_2} + y\binom{b_1}{b_2} = \binom{xa_1 + yb_1}{xa_2 + yb_2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$.

EXERCÍCIOS

2.2.18: Mostre que, dadas duas transformações do plano T_1 e T_2 definidas por matrizes M_1 e M_2, então a transformação $T_2 \circ T_1 : R^2 \to R^2$ será definida pela matriz $M_2 \cdot M_1$ (Sugestão: faça as contas!).

2.2.19: Mostre que a transformação identidade $I:R^2 \to R^2$ é linear. Qual a matriz definida por ela?

Uma conseqüência dos Exercícios 2.2.18 e 2.2.19 é que se a matriz A é inversível, então a transformação T_A será inversível. Com efeito, por 2.2.18 a matriz de $T_A \cdot T_{A^{-1}}$ é a matriz identidade 2X2 (por quê?), logo $T_A \cdot T_{A^{-1}} = I$, e o mesmo ocorre com $T_{A^{-1}} \cdot T_A$ e assim a transformação T_A possui uma inversa, que será $T_{A^{-1}}$.

DEFINIÇÃO 2.2.20 - Seja $T: R^2 \to R^2$ uma transformação linear do plano. O <u>núcleo</u> de T é o subconjunto do plano formado pelos vetores v tais que $Tv = 0$:

$$N(T) = \{v \in R^2 | T(v) = 0\}.$$

EXEMPLO

2.2.21: Seja $T: R^2 \to R^2$ dada por $(x,y) \mapsto (x-y, x+y)$. Para achar $N(T)$, se $v = (x,y) \in N(T)$ então $T(v) = (x-y, x+y) = (0,0)$, ou seja

$$x-y = 0$$
$$x+y = 0$$

e assim $x = y = 0$. Desta maneira, $N(T) = \{(0,0)\}$.

<u>Observe que achar</u> $N(T)$ <u>recai em estudar um sistema linear homogêneo</u>.

EXERCÍCIO

2.2.22: Dada $T: R^2 \to R^2$ uma transformação linear do plano, mostre que o vetor nulo sempre pertence a $N(T)$.

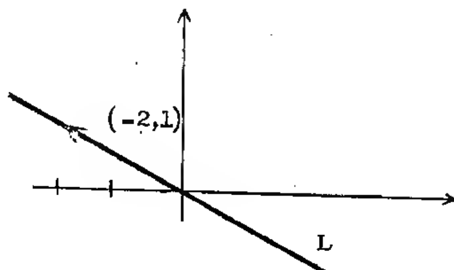
EXEMPLO

2.2.23: Se $T: R^2 \to R^2$ é definida por $(x,y) \mapsto (x+2y, -2x-4y)$ ache o núcleo de T.

Mais uma vez, se $v = (x,y) \in N(T)$, então $T(v) = (x+2y, -2x-4y) = (0,0)$ ou seja

$$x + 2y = 0$$
$$2x + 4y = 0$$

e êste sistema tem a solução geral $(-2y,y)$; logo, $v \in N(T) \leftrightarrow v = (-2y,y)$, ou seja $v \in N(T)$ se e sòmente se v está sôbre a reta L definida por $(-2,1)$.



EXERCÍCIO

2.2.24: Seja $T_A:R^2 \to R^2$ definida pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Verifique se T_A é sôbre.

O exercício acima mostra que testar se uma transformação linear do plano é sôbre reduz-se a resolver um sistema linear (não homogêneo!).

EXEMPLO

2.2.25: Seja $T:R^2 \to R^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e calculemos sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 0 & -12 \end{pmatrix} \to$$

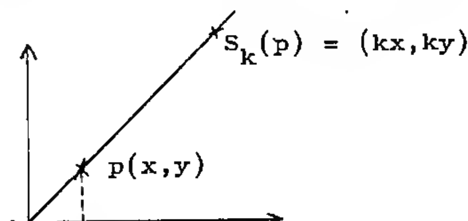
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e assim a matriz de T^{-1} será $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

Tanto as rotações como as translações preservam distâncias entre pontos. Um exemplo importante de transformação que não faz isso é o seguinte:

DEFINIÇÃO 2.2.26 - Uma <u>transformação de semelhança</u> é a transformação S_k definida por

$$S_k\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{kx}{ky} \qquad k \neq 0$$



Tentemos comparar as propriedades de uma transformação de semelhança (ou, simplesmente, semelhança) com as propriedades que já conhecemos das rotações e das translações. Em primeiro lugar, S não preserva distâncias (exceto se k=1). Se $k > 1$, $d(p,q) < d(S_k(p),S_k(q))$ e se $k < 1$, $d(p,q) > d(S_k(p),S_k(q))$. É óbvio que uma reta L passando pela origem é invariante sob S_k (isto é, se $p \in L$, $S_k(p) \in L$). Vejamos como S_k transforma uma reta qualquer:

Seja $L = \{(x,y) \in R^2 | ax + by + c = 0\}$ e tome $p = \binom{x}{y}$, $p \in L$; então, $S_k(p) = \binom{x'}{y'} = \binom{kx}{ky}$ logo $x = x'/k$, $y = y'/k$ e assim $\frac{a}{k} x' + \frac{b}{k} y' + c = 0$ donde

$ax' + by' + ck = 0$ e provamos que uma semelhança transforma retas em retas.

Deixamos como exercício estudar a ação de uma semelhança sôbre círculos.

EXERCÍCIOS

2.2.27: Seja C um círculo de raio r e centro $p_o=(x_o,y_o)$. Em que figura a semelhança S_k transforma C?

2.2.28: Decida se uma semelhança altera ou preserva o ângulo entre duas retas.

2.2.29: Mostre que uma semelhança S_k é inversível e que a inversa é uma semelhança.

DEFINIÇÃO 2.2.30 - A <u>reflexão em tôrno do eixo</u> O_x é a transformação do plano R_x definida por

$$R_x\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{x}{-y} .$$

A <u>reflexão em tôrno do eixo</u> O_y é a transformação R_y definida por

$$R_y\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{-x}{y} .$$

EXERCÍCIO

2.2.31: O que é a transformação $R_x \circ R_y$? e $R_y \circ R_x$? Calcule $R_x \circ R_x$ e $R_y \circ R_y$. Prove que R_x e R_y são inversíveis e calcule suas inversas.

DEFINIÇÃO 2.2.32 - Um alongamento paralelo a O_y é a transformação do plano definida por

$$A_k\binom{x}{y}' = \binom{x}{ky} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\binom{x}{y} \quad k \neq 0.$$

Se $k < 1$, temos uma compressão ao longo de O_y. Se $k > 1$, teremos um alongamento pròpriamente dito ao longo de O_y.

Observe que uma reta passando pela origem é transformada, por um alongamento, em uma reta passando pela origem (como muda o coeficiente angular da reta?).

EXERCÍCIOS

2.2.33: Decida se um alongamento paralelo a O_y transforma retas em retas.

2.2.34: Se $C = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, ache a imagem de C por um alongamento paralelo a O_y.

2.2.35: Dadas duas retas L_1 e L_2, estude como muda o ângulo entre elas após aplicarmos às mesmas um alongamento paralelo à O_y.

2.2.36: Defina, de maneira análoga a 2.2.32, um alongamento paralelo a O_x e resolva os Exercícios 2.2.7, 2.2.28 e 2.2.29 relativamente a esta transformação.

2.2.37: Dado A_k um alongamento ao longo de O_x e A_ℓ um alongamento ao longo de O_y, ache a transformação $A_k \cdot A_\ell$. É verdade que $A_k \cdot A_\ell = A_\ell \cdot A_k$?

DEFINIÇÃO 2.2.38 - Um <u>cisalhamento</u> paralelo a O_x é uma transformação do tipo

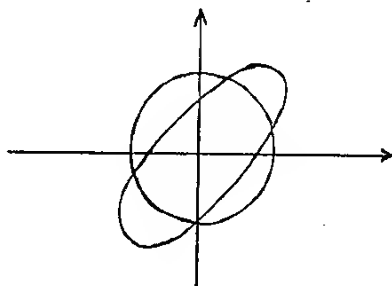
$$C_k\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} \quad k \neq 0 .$$

Um <u>cisalhamento</u> paralelo a O_y é uma transformação da forma

$$C_k\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}\binom{x}{y} \quad k \neq 0 .$$

EXEMPLO

2.2.39: Seja o círculo $x^2+y^2 = 1$ e apliquemos a êle um cisalhamento paralelo a O_x. Sabemos que $C_k\binom{x}{y} = \binom{x'}{y'} = \binom{x+ky}{y}$ logo $x' = x + ky$, $y' = y$ e vemos que $(x'-ky')+(y')^2=(x')^2+k^2(y')^2+(y')^2-2kx'y' = 1$ que é a equação de um elipse (por quê?).



EXERCÍCIOS

2.2.40: Como se comportam retas sob a ação de um cisalhamento?

2.2.41: Qual é a composta de um cisalhamento paralelo a O_x com um cisalhamento paralelo a O_y? A ordem da composição afetará o resultado?

É bem sabido que uma matriz quadrada A, $n\times n$, é inversível se e sòmente se pode ser transformada na matriz identidadc $n\times n$ por um número finito de operações elementares sôbre suas colunas. As operações elementares são:

1) trocar as posições de duas colunas
2) multiplicar uma coluna por uma constante não nula
3) somar a uma coluna outra coluna.

Estas operações podem ser efetuadas multiplicando A à direita pelas chamadas "matrizes elementares" que, no caso 2×2 são:

1) trocar as posições de duas colunas: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2) multiplicar uma coluna por uma constante não nula:

$$M_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

3) somar a uma coluna outra coluna:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

As matrizes M_3 e M_3' definem cisalhamentos, M_2 e M_2' alongamentos. Quanto a M_1, é fácil de ver que define uma reflexão em tôrno da reta $y = x$.

Por outro lado, uma matriz quadrada pode ser transformada na identidade por transformações elementares se e sòmente é um produto de transformações elementares (por

quê? Quais são as inversas das matrizes elementares?) desta maneira podemos chegar ao seguinte resultado:

TEOREMA 2.2.42 - Seja T uma transformação do plano definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é inversível. Então T é a composta de cisalhamentos, alongamentos e reflexões.

EXEMPLO

2.2.43: Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, exprima a transformação definida por A na forma do Teorema 2.2.26.

Temos que

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 12 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 12 & -12 \\ 6 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -12 \\ -2 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \\ -1/9 & 8 \\ -2/9 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4/9 & 2/3 \\ -2/9 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/18 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$ logo

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/12\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-1/8 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1/3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ um produto de alongamentos, cisalhamentos e reflexões.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Passamos, agora, ao estudo do que realmente nos interessa, as transformações lineares entre dois espaços vetoriais V e W. Tal estudo já foi preparado pelo material do Capítulo 2, que servirá de exemplo e de motivação.

3.1 - Definição e generalidades

DEFINIÇÃO 3.1.1 - Sejam V e W espaços vetoriais sôbre um mesmo corpo K. Uma transformação linear $T:V \to W$ é uma função de V em W que satisfaz às propfiedades:

1) $\forall\, u,v \in V$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2) $\forall\, k \in K$, $v \in V$, $T(kv) = kT(v)$

O Capítulo 2 nos fornece exemplos de transformações lineares (lá $V = W = R^2$). Uma maneira bem geral de obter transformações lineares, quando V e W são de dimensão finita é a seguinte:

EXEMPLOS

3.1.2: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão fini

ta, onde $\dim V = n$, $\dim W = m$. Tôda matriz A $m\times n$ com coeficientes em K dá origem a uma transformação linear $T_A: V \to W$; com efeito, seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ uma base de W. Se $v = \Sigma x_i v_i$, defina $T_A(v)$ como sendo o vetor de W cujas coordenadas, na base $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ são os coeficientes da matriz $m\times 1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Então $T_A(kv) = kT_A(v)$, pois

$$A \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e $T_A(v_1 + v_2) = T_A(v_1) + T_A(v_2)$ visto que

$$A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, se $V = R^2$, $W = R^3$ e $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então, tomando em ambos os espaços as bases canônicas, temos que as coordenadas de $v = \binom{3}{7}$ serão dadas por:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Veremos, em breve, que o método do Exemplo 3.1.2 nos dá tôdas as transformações lineares entre dois espa-

ços vetoriais de dimensão finita.

LEMA 3.1.3 - Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, e 0 é o vetor nulo de V, então $T(0)$ será o vetor nulo de W.

Demonstração: Com efeito, como $0 = 0 \cdot 0$ temos que $T(0) = 0 \cdot T(0)$ e como $0 \cdot T(0) = 0$ segue-se que $T(0) = 0$.

LEMA 3.1.4 - Uma função $f:V \to W$ é uma transformação linear se e sòmente se, $\forall k_1, k_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$, temos que $T(k_1v_1+k_1v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$.

Demonstração: Pelo Axioma 1, $T(k_1v_1 + k_2v_2) = T(k_1v_1) + T(k_2v_2)$ e usando o Axioma 2 vem que $T(k_1v_1) + T(k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$. A recíproca segue-se de que $T(k_1v_1) = T(k_1v_1 + 0 \cdot v_2) = k_1T(v_1)$ e $T(1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2) = T(v_1+v_2) = 1 \cdot T(v_1) + 1 \cdot T(v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.

Uma transformação linear fica perfeitamente determinada se conhecemos como ela transforma os vetores de uma base, como é provado a seguir:

LEMA 3.1.5 - Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então T

fica perfeitamente determinada pelos votores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$.

<u>Demonstração</u>: Seja $v \in V$, então $v = \Sigma x_i v_i$ e assim $T(v) = T(\Sigma x_i v_i) = \Sigma x_i T(v_i)$. Por outro lado, se $S: V \to W$ é tal que $S(v_i) = T(v_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, vemos que $S(v) = S(\Sigma x_i v_i) = \Sigma x_i S(v_i) = \Sigma x_i T(v_i) = T(\Sigma x_i v_i) = T(v)$.

. É importante frizar que, em geral, os vetores $T(v_i), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ <u>não</u> constituem uma base para W e podem mesmo deixar de ser linearmente independentes, como o mostra o exemplo abaixo:

EXEMPLO

3.1.6: Seja $T: R^3 \to R^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x, x-y+z)$.

Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica do R^3, vemos que $T(e_1) = (2,1)$, $T(e_2) = (0,-1)$ e $T(e_3) = (0,1)$ e êstes vetores não são linearmente independentes.

Já vimos que dados espaços vetoriais V e W, de dimensão n e m respectivamente, tôda matriz A $m \times n$ dá origem a uma transformação linear $T_A: V \to W$; veremos agora, por outro lado, que tôda transformação linear $T: V \to W$ dá origem a uma matriz $m \times n$.

DEFINIÇÃO 3.1.7 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e

$\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases para V e W respectivamente e $T:V \to W$ uma transformação linear. A matriz de T em relação às bases β, β', denotada por $T]_{\beta'}^{\beta}$, é a matriz $m \times n$ cuja j-ésima coluna são as coordenadas de $T(v_j)$ na base β' (ou seja, a_{ij} é a i-ésima coordenada, na base β', do vetor $T(v_j)$).

Como exemplo, seja $T:R^3 \to R^2$ dada por $T(x,y,z) = (x-y,\ x+2y+z)$ e tomemos β, β' como sendo as bases canônicas de R^3 e R^2 respectivamente. Temos então que:

$$T(v_1) = (1,1) = w_1 + w_2$$

$$T(v_2) = (-1,2) = -w_1 + 2w_2$$

$$T(v_3) = (0,1) = w_2$$

e assim

$$T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Convém salientar que a matriz de uma transformação $T:V \to W$ é sempre tomada em relação a duas bases, uma em V e a outra em W. Mudando as bases mudará a matriz.

EXEMPLOS

3.1.8: Seja mais uma vez, $T:R^3 \to R^2$ definida por

$(x,y,z) \mapsto (x-y,\ 2y+x+z)$. Tome $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ e $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,-1)$. Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\beta' = \{w_1, w_2\}$, achemos a matriz

$T]_{\beta'}^{\beta}$.

Já sabemos que:

$$T(v_1) = (1,1)$$
$$T(v_2) = (-1,2)$$
$$T(v_3) = (0,1)$$

Mas $(1,1) = w_1$, $(0,1) = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$; $(-1,2) = = \frac{1}{2} w_1 - 3/2\ w_2$ e podemos, portanto, escrever:

$$T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.1.9: Tome $V = W = R^2$, $\beta = \{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}$, $\beta' = \{w_1 = (1,1),\ w_2 = (1,-1)\}$ e considere a transformação identidade $I: R^2 \to R^2$. Qual a matriz $I]_{\beta'}^{\beta}$?

Vemos que
$$I(v_1) = v_1 = (1,0) = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$
$$I(v_2) = v_2 = (0,1) = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$$

e assim $I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ o que mostra não ser a matriz da transformação identidade em relação a estas bases a matriz identidade 2×2.

3.1.10: Seja P_3 o espaço vetorial dos polinômios reais de grau ≤ 3 e consideremos a base $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ dêste espaço. Se $D: P_3 \to P_3$ é a operação linear derivação, a matriz $D]_{\beta}^{\beta}$ é achada como segue:

$$D(1) = 0$$
$$D(t) = 1$$
$$D(t^2) = 2t$$
$$D(t^3) = 3t^2$$

logo

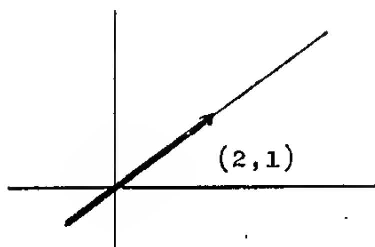
$$D]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.11: O conjunto dos números reais R constitui um espaço vetorial sôbre R. Seja $T: P_3 \to R$ a transformação linear definida por $(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \mapsto a_0$ (isto é, $p(t) \to p(0)$. É fácil verificar que T é de fato uma transformação linear (faça-o!). Uma base para o espaço vetorial real R é formada pelo vetor $w_1 = 1$. Se β é a base de P_3 constituida por $v_1 = 1$, $v_2 = t$, $v_3 = t^2$, $v_4 = t^3$, vemos que $T(1) = 1$, $T(t) = 0$, $T(t^2) = 0$, $T(t^3) = 0$, e assim

$$T]_{\beta}^{\beta'} = (1,0,0,0).$$

Nem sempre uma transformação linear $T: V \to W$ é dada por sua matriz em relação a bases que tornam imediato identificar a ação de T. Seja, por exemplo, no espaço R^2, a reta L determinada pelo vetor (2,1) e a transformação $T: R^2 \to R^2$ projeção ortogonal sôbre L. Assim, se $u_1 =$

$= (2,1)$, $u_2 = (-1,2)$ e $\beta = \{u_1,u_2\}$, então $T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.



Por outro lado, a matriz de T em relação à base canônica do R^2 é $= \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. Fica assim claro que a matriz de T em relação a β permite uma identificação imediata de T, mas o mesmo não acontece com sua matriz em relação a β'.

Ao estudarmos uma transformação linear é assim òbviamente interessante procurar bases em relação às quais sua matriz seja o mais simples possível.

Como mais um exemplo neste sentido, sejam $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (-1,4) \in R^2$ e $T:R^2 \to R^2$ definida por $Tv_1 = 2v_1$, $T(v_2) = -4v_2$. Se $\beta = \{v_1,v_2\}$ então $T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. A matriz de T em relação à base canônica $\beta' = \{e_1,e_2\}$ é $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -24 & 38 \end{pmatrix}$. Aprenderemos, a seguir, como relacionar as matrizes de uma mesma transformação em bases diferentes, a fim de permitir um estudo melhor das transformações lineares.

EXERCÍCIOS

3.1.12: Seja, no R^3, o plano que passa pela origem e determinado pelos vetores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,-1,1)$. Se T é a transformação linear reflexão neste plano, ache a matriz de T em relação à base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_3 = (2,0,-2)$. Qual a matriz de T em relação à base canônica do R^3?

3.1.13: Mostre que se $V = W$ e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\beta' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ então a matriz da identidade em relação a estas bases, $I]^{\beta}_{\beta'}$, é a matriz identidade nxn.

3.1.14: Tome, em P_3, as bases $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $\beta' = \{1, 1+t, t^2+t, t^3+t^2\}$. Calcule as matrizes $D]^{\beta}_{\beta'}$, $D]^{\beta'}_{\beta}$, $D]^{\beta'}_{\beta'}$, onde $D: P_3 \to P_3$ é o operador linear derivação.

LEMA 3.1.15 - Sejam $T: V \to W$ uma transformação linear e β, β' bases de V e W respectivamente. Se $v]_{\beta}$ designa as coordenadas de v na base β e $T(v)]_{\beta'}$ as de $T(v)$ na base β' então

$$T(v)]_{\beta'} = (T]^{\beta}_{\beta'})(v]_{\beta}) .$$

<u>Demonstração</u>: Se $T(v) = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$, onde $\beta' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ e $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, com $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ temos que $T(v) = T(\sum_{j=1}^{s} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{s} x_j\, T(v_j)$. Se $T(v_j) =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k$, vem então que $T(v) = \sum_j x_j (\sum_k a_{kj} w_k) =$

$= \sum_k (\sum_j x_j a_{kj}) w_k$ e como β' é uma base, $y_k = \sum_j a_{kj} x_j$,

ou seja, em notação matricial

$$T(v)]_{\beta'} = (T]^{\beta}_{\beta'})(v]_{\beta}).$$

Sejam agora $T: V \to U$, $S: U \to W$ transformações lineares β, β' e β'' bases de V, U e W respectivamente. Podemos calcular as matrizes $T]^{\beta}_{\beta'}$, $S]^{\beta'}_{\beta''}$ e $S \cdot T]^{\beta}_{\beta''}$. Haverá alguma relação entre estas matrizes? A resposta é dada pelo lema abaixo:

LEMA 3.1.16 - Se V, U e W são espaços vetoriais com bases β, β' e β'' respectivamente, $T: V \to U$, $S: U \to W$ transformações lineares, então

$$S \cdot T]^{\beta}_{\beta''} = (S]^{\beta'}_{\beta''})(T]^{\beta}_{\beta'}) .$$

<u>Demonstração</u>: Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\beta'' = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$. Se $T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j$

$S(u_j) = \sum_{s=1}^{r} b_{sj} w_s$, vem que

$$(S \cdot T)(v_i) = S(T(v_i)) = S(\sum_j a_{ji} u_j) = \sum_j a_{ji} \cdot S(u_j) =$$

$$= \sum_j a_{ji} (\sum_s b_{sj} w_s) = \sum_s (\sum_j b_{sj} a_{ji}) w_s$$

e pondo

$$(S \cdot T)(v_i) = \sum_s c_{si} w_s$$

vemos que $c_{si} = \sum b_{sj} a_{ji}$, o que demonstra o lema.

EXEMPLO

3.1.17: Sejam $T:R^3 \to R^3$, $S:R^3 \to R^2$ dadas por $(x,y,z) \mapsto$ $\mapsto (x-y,z,y+z)$ e $(x,y,z) \mapsto (2x+y,y+z)$ respectivamente e $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (0,1)$. Se $\beta = \beta' = \{v_1,v_2,v_3\}$, $\beta''=\{w_1,w_2\}$ vem então que:

$$T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S]^{\beta'}_{\beta''} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ e assim

$$S \cdot T]^{\beta}_{\beta''} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ como

pode também ser verificado diretamente.

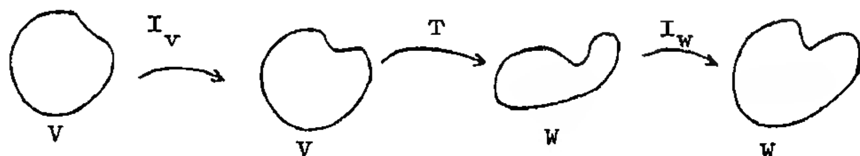
O lema acima permite achar a matriz de uma transformação linear om relação a bases α, α', uma vez conhecida sua matriz nas bases β, β'.

LEMA 3.1.18 - Se α, β são bases de V, α', β' bases de W e $T:V \to W$ é uma transformação linear, então:

$$T]^{\alpha}_{\alpha'} = (I_W]^{\beta'}_{\alpha'})(T]^{\beta}_{\beta'})\ (I_V]^{\alpha}_{\beta})$$ onde $I_V:V \to V$ e $I_W:W \to W$ são as transformações identidade de V e W respectivamente.

<u>Demonstração</u>: Como $T = I_W \cdot T \cdot I_V$ segue-se que $T]^{\alpha}_{\alpha'} =$ $= (I_W \cdot T]^{\beta}_{\alpha'})\ (I_V]^{\alpha}_{\beta}) = (I_W]^{\beta'}_{\alpha'})(T]^{\beta}_{\beta'})(I_V]^{\alpha}_{\beta})$,

por uma aplicação dupla do Lema 3.1.17. A figura abaixo ajuda a compreender a demonstração.



DEFINIÇÃO 3.1.19 - Dado um espaço vetorial V e α, β bases de V, <u>a matriz de passagem de α para</u> β é a matriz $I_V]^{\alpha}_{\beta}$, onde $I_V: V \to V$ é a transformação identidade de V.

EXEMPLO

3.1.20: Seja $T: R^3 \to R^2$ dada por $(x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-2y)$.

Se β e β' são as bases canônicas de R^3 e R^2 respectivamente, então

$$T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Consideremos, agora, os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = (1,-1,0)$ de R^3 e $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,-1)$ de R^2. Se $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\alpha' = \{w_1, w_2\}$, achemos $T]^{\alpha}_{\alpha'}$.

Sabemos que $T]^{\alpha}_{\alpha'} = (I_W]^{\beta'}_{\alpha'})\ (T]^{\beta}_{\beta'})\ (I_V]^{\alpha}_{\beta})$.

Para achar $I_V]^{\alpha}_{\beta}$ devemos expressar os vetores da base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ por suas coordenadas em relação à ba

se β, assim

$$I_V]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos agora $I_W]^{\beta}_{\alpha}$. Se $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ temos que

$$w_1 = e_1 + e_2$$
$$w_2 = e_1 - e_2$$

donde se segue que

$$e_1 = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$
$$e_2 = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$$

e portanto

$$I_W]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$T]^{\alpha}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

como pode ser verificado diretamente.

EXERCÍCIOS

3.1.22: Seja $M(2\times 2)$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 a coeficientes reais e considere as bases

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\beta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ache as matrizes de passagem de β para β' e de β' para β.

3.1.23: Tomemos, mais uma vez, o espaço vetorial P_3 e considere a operação linear $T:P_3 \to R$ tal que $p(t) \to \int_0^1 p(t)dt$.

Sejam as bases $\beta = \{1,t,t^2,t^3\}$ e $\beta' = \{1,t+1,t^2+t,t^3+t^2\}$ de P_3 e $\alpha = \{1\}$ de R. Ache $T]_\alpha^\beta$ e $T]_\alpha^{\beta'}$.

Já vimos, no Lema 3.1.15, que as coordenadas de um vetor $v \in V$ na base β, $v]_\beta$, do vetor $T(v)$ na base β', $T(v)]_{\beta'}$ e a matriz $T]_{\beta'}^\beta$ estão ligadas pela relação

$$T(v)]_{\beta'} = (T]_{\beta'}^\beta) (v]_\beta).$$

Se fizermos, nesta fórmula, $T = I_V$, vemos que:

$$v]_{\beta'} = (I]_{\beta'}^\beta) (v]_\beta) .$$

LEMA 3.1.23 - As coordenadas de um vetor $v \in V$ em duas bases β e β' de V estão ligadas entre si pela relação

$$v]_{\beta'} = (I]_{\beta'}^\beta) (v]_\beta)$$

onde $I]_{\beta'}^\beta$ é a matriz da passagem da base β para a base β'.

EXERCÍCIOS

3.1.24: Se $I:V \to V$ é a transformação identidade, e α e β são bases de V, demonstre que

$$I]_{\beta}^{\alpha} = (I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} \quad .$$

3.1.25: Sejam β, β' bases de V e $T:V \to V$ uma transformação linear. Mostre que

$$T]_{\beta'}^{\beta'} = (I]_{\beta'}^{\beta})(T]_{\beta}^{\beta})(I]_{\beta'}^{\beta})^{-1} \quad .$$

3.1.26: Seja o espaço P_3 e as bases $\beta = \{1,t,t^2,t^3\}$, $\beta' = \{1,1-t,1-t-t^2,1-t^3\}$. Dado $p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+ + a_3t^3$, ache suas coordenadas na base β'.

3.2 - Imagem e núcleo de uma transformação linear

DEFINIÇÃO 3.2.1 - Seja $T:V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, $N(T)$ é o subconjunto de V definido por $N(T) = \{v \in V \mid T(v)=0\}$.

EXEMPLOS

3.2.2: Se $T:R^2 \to R^2$ é dada por $(x,y) \to (x-y,2x+y)$, temos que $T(x,y) = (0,0)$ se e sòmente se $(x-y,2x+y) = (0,0)$ ou seja $x-y = 0$, $2x + y = 0$ o que acarreta $x = y = 0$ e assim $N(T) = \{(0,0)\}$, o subconjunto formado pelo vetor zero do R^2.

3.2.3: Seja $T:R^3 \to R^2$ dada por $(x,y,z) \to (x-z,y+2x)$.
Então, $T(x,y,z) = (0,0)$ se e sòmente se $(x-z,y+2x)=$

$= (0,0)$ ou equivalentemente

$$x - z = 0$$

$$y + 2x = 0$$

e assim $N(T) = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x=z,\ y+2x = 0\} = \{r(1,-2,1), r \in R\}$.

Êstes dois exemplos mostram bem a forte relação existente entre os sistemas de equações lineares e o estudo das transformações lineares.

EXERCÍCIO

3.2.4: Se $D: P_3 \to P_3$ é o operador linear derivação, determine seu núcleo.

Nos exemplos acima, vimos que os núcleos das transformações são, respectivamente, a origem e uma reta passando pela origem; em geral temos o seguinte resultado:

LEMA 3.2.5 - Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então $N(T)$ é um subespaço vetorial de V.

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar, $N(T)$ contém pelo menos um vetor, o vetor zero (por quê?). Se $u, v \in N(T)$, $T(u) = T(v) = 0$ e assim $T(au+bv) = aT(v) + bT(v) = 0$, logo $au+bv \in N(T)$.

EXERCÍCIOS

3.2.6: Qual a dimensão do núcleo da transformação linear derivação $D: P_3 \to P_3$?

3.2.7: Dê um exemplo de uma transformação linear $T:R^3 \to R^3$ cujo núcleo tenha dimensão zero.

3.2.8: Ache uma transformação linear $T:R^3 \to R^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

3.2.9: Dê uma transformação linear $T:R^3 \to R^3$ cujo núcleo tenha dimensão 2.

3.2.10: Nos Exercícios 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.9, determine se as transformações lineares encontradas são sobrojetoras.

Relembramos a definição de função injetora: $f:A \to B$ é injetora se e sòmente se $x \neq y$ acarreta que $f(x) \neq f(y)$. O lema abaixo caracteriza as transformações lineares injetoras em têrmos de seus núcleos.

LEMA 3.2.11 - Uma transformação linear $T:V \to W$ é injetora se e sòmente se $N(T) = \{0\}$, 0 o vetor nulo de V.

Demonstração: Suponha que existem $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$ e tais que $T(v_1) = T(v_2)$ (ou seja, T não é injetora). Mas então $T(v_1 - v_2) = 0$ e se $N(T) = \{0\}$, vem que $v_1 - v_2 = 0$ logo $v_1 = v_2$, um absurdo.
Por outro lado, se $N(T) \neq \{0\}$, seja $v \in N(T)$, $v \neq 0$, então $T(v) = T(0) = 0$ e T não é injetora.

$T(v) = 0 = T(0)$ mais lógico.

EXERCÍCIOS

3.2.12: Verifique se a transformação $T:R^2 \to R^2$ dada por $T(x,y) = (x-2y,\ 2x-4y)$ é injetora.

3.2.13: Mostre que $T:R^3 \to R^2$ definida por $(x,y,z) \mapsto (x-2y,y)$ não é injetora. Determine seu núcleo.

DEFINIÇÃO 3.2.14 - O conjunto de valores da transformação linear $T:V \to W$ é chamado de <u>imagem de T</u>, e denotado por $I(T)$.

EXEMPLOS

3.2.15: Se $T:R^2 \to R^2$ é a transformação $(x,y) \mapsto (x,x)$ então T transforma todo o plano na reta $x = y$ e, assim, $(1,2) \notin I(T)$.

3.2.16: Vejamos se o vetor $(1,4) \in I(T)$, onde $T:R^2 \to R^2$ é dada por $(x,y) \mapsto (2x-y,x+y)$. Desejamos saber se existe $(x,y) \in R^2$ tal que $T(x,y) = (1,4)$, ou seja $(2x-y,x+y) = (1,4)$. Desta maneira, nosso problema recai em resolver o sistema

$$2x-y = 1$$
$$x+y = 4$$

o qual tem a solução $x = 5/3$, $y = -7/3$, e assim $(1,4) \in I(T)$.

Já mostramos que o núcleo de uma transformação li-

near $T:V \to W$ é um subespaço de V. A imagem de T, $I(T)$ também é um subespaço (de W, naturalmente), conforme o lema abaixo:

LEMA 3.2.17 - Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, então $I(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Demonstração: $I(T)$ é òbviamente não vazio (por quê?).

Por outro lado, se $w_1, w_2 \in I(T)$ $\exists$ $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, mas então
$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1w_1 + a_2w_2$ e assim $a_1w_1 + a_2w_2 \in I(T)$.

EXERCÍCIOS

3.2.18: É possível existir uma transformação linear injetora $T:R^3 \to R^2$? Por quê?

3.2.19: Existe uma transformação linear sobrejetora $T:R^2 \to R^3$? Por quê?

3.2.20: Seja $T:R^2 \to R^2$. Mostre que se T não é sobrejetora, então T não é injetora.

Os exercícios acima fazem ver que a dimensão do domínio de T parece ter influência no fato de a transformação ser ou não injetora ou sobrejetora. A situação exata é descrita a seguir:

TEOREMA 3.2.21 - (Teorema do núcleo e da imagem):

Seja $T:V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Então,

$\dim N(T) + \dim I(T) = \dim V$.

Demonstração: Tome $v_1, v_2, \ldots, v_s$ uma base para $N(T)$ e seja $w_1, w_2, \ldots, w_t$ uma base de $I(T)$. Como $w_1, w_2, \ldots, w_t \in I(T)$, podemos encontrar $u_1, u_2, \ldots, u_t \in V$ tais que $T(u_i) = w_i$, $1 \leq i \leq t$. Afirmamos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, u_2, \ldots, u_t$ formam uma base de V, o que concluirá a demonstração.

Seja $v \in V$ e consideremos o vetor $T(v) \in W$. Com $T(v) \in I(T)$, temos que $T(v) = \sum_{i=1}^{t} x_i w_i$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_t \in K$. Tomando o vetor $u = v - \Sigma x_i u_i$ vemos que $T(u) = T(v - \Sigma x_i u_i) = T(v) - \Sigma x_i T(u_i) = T(v) - \Sigma x_i w_i =$ $= T(v) - T(v) = 0$, logo $u \in N(T)$ e assim $u = \sum_{j=1}^{s} y_j v_j$, logo $v - \Sigma x_i u_i = \Sigma y_j v_j$ donde $v = \Sigma x_i u_i + \Sigma y_j v_j$. Ou seja, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, u_2, \ldots, u_t$ geram V. Por outro lado, êstes vetores são linearmente independentes: se $\Sigma a_i u_i + \Sigma b_j v_j = 0$, vem que $T(\Sigma a_i u_i + \Sigma b_j v_j) =$ $= T(\Sigma a_i u_i) + T(\Sigma b_j v_j) = \Sigma a_i T(u_i) + \Sigma b_j T(v_j) = \Sigma a_i w_i = 0$ e como os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_t$ formam uma base de $I(T)$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 0$, logo $\Sigma b_j v_j = 0$ e como $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_s$ constituem uma base de $N(T)$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_s =$ $= 0$, e assim $u_1, u_2, \ldots, u_t, v_1, v_2, \ldots, v_s$ são linearmente independentes.

COROLÁRIO 3.2.22 - Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, V e W são espaços de dimensão finita

dim (V) > dim (W), T não é injetora.

ROLÁRIO 3.2.23 - Se $T:V \to W$ é uma transformação linear; V e W são espaços de dimen-
o finita, e $\dim(V) < \dim(W)$, T não é sobrejetora.

ERCÍCIO

2.24: Mostre que se V e W são espaços vetoriais de mesma dimensão e $T:V \to W$ é uma transformação li
ear então T é injetora $\leftrightarrow$ T é sobrejetora. (Sugestão:
e a fórmula do teorema do núcleo e da imagem).

3 - Transformações lineares inversíveis

Já conhecemos a definição de uma função inversível.
particular, faz sentido falar em uma transformação li-
ear inversível e vale então o seguinte resultado:

MA 3.3.1 - Se $T:V \to W$ é uma transformação linear inver sível, sua inversa $S:W \to V$ será também uma
ansformação linear.

monstração: Devemos mostrar que $\forall k_1, k_2 \in K$, $w_1, w_2 \in W$ então $S(k_1w_1 + k_2w_2) = k_1S(w_1) + k_2S(w_2)$.
jam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$; en-
o $T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1w_1 + k_2w_2$ e assim $S(k_1w_1+k_2w_2) =$
$k_1v_1 + k_2v_2$. Mas como $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, segue-

-se que $S(w_1) = v_1$ e $S(w_2) = v_2$, logo $S(k_1w_1 + k_2w_2) = $
$= k_1S(w_1) + k_2S(w_2)$, o que queríamos demonstrar.

Já vimos que uma função $f:A \to B$ pode possuir uma inversa à direita sem ser inversível ou uma inversa à esquerda sem ser inversível. Tal não ocorre com as transformações lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão, como visto em 3.2.24. O mesmo resultado se conclui dos teoremas abaixo:

TEOREMA 3.3.2 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T:V \to W$ uma transformação linear. Então T é inversível se e sòmente se T transforma uma base de V em uma base de W.

Demonstração: Suponhamos T inversível e seja $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ uma base de V. Consideremos os vetores $w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2),\dots,w_n = T(v_n)$; em primeiro lugar, os vetores $w_1,w_2,\dots,w_n$ são linearmente independentes. Com efeito, se a equação vetorial $0 = x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n$ tem uma solução diferente de $(0,0,\dots,0)$, vem que, chamando de S a inversa de T, $0 = S(0) = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ uma contradição, pois $v_1,v_2,\dots,v_n$ são linearmente independentes. Além disso, se $w \in W$, então $S(w) \in V$ e assim $S(w) = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$, logo $w = TS(w) = \Sigma a_iT(v_i) = \Sigma a_iw_i$, logo os vetores $w_1,w_2,\dots,w_n$ geram W e formam portanto uma base de W.

Por outro lado, se os vetores $w_1,w_2,\dots,w_n$ formam uma base para W, definamos $S:W \to V$ especificando que $S(w_i) = v_i$, $i=1,2,\dots,n$ (por quê isso é possível? veja 3.1.5). Então, se $v \in V$, $v = \Sigma a_i v_i$, vemos que $(S.T)(v) = S(T(v)) = S(\Sigma a_i T(v_i)) = S(\Sigma a_i w_i) = \Sigma a_i S(w_i) = \Sigma a_i v_i = v$ e se $w \in W$, $w = \Sigma b_i w_i$, $T.S(w) = T.S(\Sigma b_i w_i) = T(\Sigma b_i S(w_i)) = T(\Sigma b_i v_i) = \Sigma b_i T(v_i) = \Sigma b_i w_i = w$ e assim T é inversível, com inversa S.

COROLÁRIO 3.3.3 - Se existe uma transformação linear inversível entre dois espaços vetoriais de dimensão finita, suas dimensões coincidem.

TEOREMA 3.3.4 - Seja $T:V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de mesma dimensão. Então, as condições abaixo são equivalentes:

1) T é inversível

2) T é injetora

3) T é sobrejetora

4) T transforma bases em bases.

OBSERVAÇÃO: O teorema do núcleo e da imagem permite demonstrar, como pedido em 3.2.24, que 1), 2) e 3) são equivalentes. Apresentamos nova demonstração por ser mais geométrica.

<u>Demonstração:</u> A implicação 1) → 2) é trivial. Mostremos que 2) → 3): seja $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ uma base para V. Como T é injetora, os vetores $w_i = T(v_i)$ $i=1,\dots,n$ são linearmente independentes; com efeito, suponha que a equação $x_1w_1 + w_2w_2 +\dots+ x_nw_n = 0$ tenha uma solução não trivial $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ e consideremos o vetor $v = b_1v_1 + b_2v_2 +\dots+ b_nv_n$. É óbvio que v é não nulo (por quê?) e assim o núcleo de T contém um vetor não nulo $(T(v) = 0)$, o que é impossível pois T é injetora. Mas se os vetores distintos (por quê?) $w_1, w_2, \dots, w_n$ são linearmente independentes, como a dimensão de W é n, êles formam uma base para W.

Seja $w \in W$; vemos então que $w = \Sigma a_i w_i$ e assim se $v = \Sigma a_i v_i$, segue-se que $T(v) = T(\Sigma a_i v_i) = \Sigma a_i T(v_i) = \Sigma a_i w_i = w$, logo T é sobrejetora.

Mostraremos agora que 3) → 4). Seja, mais uma vez, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Afirmamos que os vetores $w_i = T(v_i)$, $i=1,\dots,n$ geram W. Com efeito, seja $w \in W$ e $v \in V$ tal que $T(v) = w$; mas $v = \Sigma a_i v_i$ e assim $w = T(v) = T(\Sigma a_i v_i) = \Sigma a_i w_i$, o que demonstra a afirmação. Mas como a dimensão de W é n, segue-se que os vetores $w_1, w_2, \dots, w_n$ constituem de fato uma base para W.
A demonstração do 4) → 1) já foi feita em 3.3.2.

DEFINIÇÃO 3.3.5 - Se $T: V \to W$ é uma transformação linear

nversível, diz-se que T é um <u>isomorfismo</u> entre V e W. ois espaços V e W são <u>isomorfos</u> se há um isomorfismo ntre êles.

EOREMA 3.3.6 - Dois espaços vetoriais V e W sôbre um mesmo corpo K são isomorfos se e sòmente e têm a mesma dimensão.

<u>emonstração</u>: Se V e W têm a mesma dimensão sejam $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases de V e W respectivamente. Defina $T:V \to W$ por $(v_i) = w_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Por 3.3.4 T é inversível. O orolário 3.3.3 conclui a demonstração.

XERCÍCIOS

.3.7: Dê um exemplo de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensões diferentes que é injeora mas não é sobrejetora; que é sobrejetora mas não é njetora.

.3.8: Uma transformação linear $T:V \to V$ é inversível se e sòmente se a matriz de T em relação a uma base ualquer β de V, $T]_\beta^\beta$ é inversível.

.3.9: Usando o fato de que <u>um determinante é não nulo se e sòmente se suas colunas são linearmente independentes</u> demonstre que $\det(T]_\beta^\beta)$ é não nulo se e sòmente e $T:V \to V$ é inversível.

3.4 - Os sistemas lineares

Neste parágrafo, estudamos os sistemas lineares usando o Teorema do Núcleo e da Imagem.

DEFINIÇÃO 3.4.1 - Dado o sistema linear

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \dots + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} x_1 & + & a_{s2} x_2 & + \dots + & a_{sn} x_n & = & b_s \end{array} \qquad (I)$$

onde a_{ij}, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n$, x_i, $1 \leq i \leq n$, b_j, $1 \leq j \leq s$ são elementos de um corpo K, a matriz do sistema é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz do sistema

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$2x - z = 5$$

$$x + 3y - 2z = 0$$

será

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

DEFINIÇÃO 3.4.2 - O sistema linear (I) diz-se <u>homogêneo</u> se $b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$.

Observe que, fazendo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

O sistema (I), escreve-se, em notação matricial, como $AX = B$.

EXERCÍCIO

3.4.3: Escreva cada um dos sistemas abaixo em forma matricial indicando, em cada caso, a matriz do sistema

a) $3x+y-5z = -1$
$x-2y+z = -5$
$x+5y-7z = 2$

b) $3x-7y+14z-8w = 24$
$x-4y+3z-w = -2$
$y+z-w = 6$
$2x-15y-z+5w = -46$

c) $6x+y+z+w = 0$
$16x+y-z+5w = 0$
$7x+2y+3z = 0$

d) $2x-3y+6z = 3$
$4x-y+z = 1$
$3x-2y+3z = 4$

O primeiro fato que podemos demonstrar é o seguinte:

TEOREMA 3.4.4 - O sistema linear homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se e sòmente se a transformação $T_A: K^n \to K^s$ induzida pela matriz A tem

núcleo não trivial.

Demonstração: é trivial, e consiste em interpretar as soluções do sistema como vetores de K^n.

COROLÁRIO 3.4.5 - O sistema homogêneo $AX = 0$ de s equações e n incógnitas tem sempre uma solução não trivial, se $n > s$.

Demonstração: Se $n > s$, a transformação $T_A: K^n \to K^s$ terá núcleo não trivial, pelo teorema do núcleo e da imagem.

DEFINIÇÃO 3.4.6 - Dada uma matriz A $s \times n$, o posto de A, $\rho(A)$, é o número máximo de colunas linearmente independentes de A.

EXEMPLO

3.4.7: Calculemos o posto de $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -11 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 12 & -2 & -11 \\ 9 & -4 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -11 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -1 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to$$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e o posto da matriz será 3.

XERCÍCIO

.4.8: Calcule o posto das matrizes abaixo:

) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se A é uma matriz $s \times n$, denotaremos por $A_i \in R^s$ i-ésima coluna de A. Assim se $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constituem base canônica do R^n, $A_i = T_A(e_i)$.

EMA 3.4.9 - Dada uma matriz A $s \times n$ a imagem da transformação T_A é gerada pelos vetores A_i, $=1,2,\ldots,n$.

<u>emonstração</u>: Se $x \in K^n$, $x = \Sigma x_i e_i$ e assim $Tx = \Sigma x_i Te_i =$ $= \Sigma x_i A_i$, logo os A_i geram $I(T_A)$.

EOREMA 3.4.10 - Dada uma matriz A, então $\rho(A)$ é a dimensão de $I(T_A)$.

<u>Demonstração</u>: Como os vetores A_i geram $I(T_A)$, podemos extrair dêles uma base para $I(T_A)$. O número de elementos desta base será o número máximo de A_i's linearmente independentes ou seja, $\rho(A)$.

Dado o sistema $AX = 0$, onde A é uma matriz $s \times n$ já sabemos que suas soluções formam um subespaço de K^n, que é exatamente o núcleo da transformação $T_A : K^n \to K^s$. O subespaço de K^n dado pelas soluções de $AX = 0$ é chamado de <u>espaço solução</u> de $AX = 0$.

COROLÁRIO 3.4.11 - Dado o sistema $AX = 0$ de s equações e n incógnitas, a dimensão do seu espaço solução é $n - \rho(A)$.

<u>Demonstração</u>: é uma conseqüência do teorema do núcleo e da imagem: $n = \dim I(T_A) + \dim N(T_A) = \rho(A) + \dim N(T_A)$.

EXERCÍCIO

3.4.12: Mostre que o sistema $AX = 0$, onde A é uma matriz $s \times n$, tem solução única se e sòmente se $\rho(A) = n$. Qual a solução?

LEMA 3.4.13 - O sistema $AX = B$ tem solução se e sòmente se o vetor $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ pertence à imagem de $T_A : K^n \to K^s$.

<u>Demonstração</u>: trivial e dispensa comentários.

Consideremos mais uma vez o sistema $AX = B$, definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

e formemos a matriz

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

que será chamada de matriz aumentada do sistema.

EXERCÍCIO

3.4.14: Em cada um dos sistemas do Exercício 3.4.3. ache a matriz aumentada do sistema.

TEOREMA 3.4.15 - O sistema $AX = B$ tem solução se e sòmente se o posto da matriz A é igual ao posto da matriz A'.

Demonstração: O posto de A, $\rho(A)$, é igual ao posto de A', $\rho(A')$, se e sòmente se o vetor B é combinação linear de $A_1, A_2, \dots, A_n$ (por quê?). Mas B é combinação linear de $A_1, A_2, \dots, A_n$ se e sòmente se B pertence ao subespaço gerado por $A_1, A_2, \dots, A_n$ e a demonstração fica concluida se relembramos que êstes veto-

res geram a imagem de T_A.

EXEMPLO

3.4.16: Considere o sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

A matriz A do sistema será $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, que tem posto 3; a matriz aumentada será

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

que também tem posto 3 e assim o sistema terá solução. Aprenderemos, em pouco, a achá-la.

Dado o sistema $AX = B$, o sistema homogêneo associado a êle é $AX = 0$.

TEOREMA 3.4.17 - Tôdas as soluções do sistema $AX = B$ são da forma $\bar{X} + X$, onde $\bar{X}$ é uma solução fixa de $AX = B$ (chamada de solução particular) e X é uma solução do sistema homogêneo associado a êle.

Demonstração: Se $\bar{X}$ e $\bar{X}'$ são soluções do sistema $AX=B$, então $A\bar{X} = B$, $A\bar{X}' = B$, logo $A(\bar{X}'-\bar{X}) = 0$ e assim $\bar{X}' - \bar{X}$ é uma solução do sistema homogêneo associado a $AX = B$. Se X é uma dessas soluções, segue-se

ue $\bar{X}' = \bar{X} + X$, o que queríamos demonstrar.

OROLÁRIO 3.4.18 - O sistema $AX = B$ tem solução única se e sòmente se $\rho(A') = \rho(A) = n$.

emonstração: Já sabemos que $AX = B$ tem solução se e sò mente se $\rho(A') = \rho(A)$. Por outro lado, a limensão do espaço solução de $AX = 0$ é $n-\rho(A)$. Assim, e $\rho(A) = n$, $AX = 0$ tem sòmente a solução trivial e, elo resultado anterior, tôdas as soluções de $AX = B$ oincidirão.

Um problema que se nos depara agora é o de achar s soluções do sistema $AX = 0$. Seja r o posto da matriz A do sistema e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_r$ as colunas linearmen te independentes. Então, para $k = r+1, r+2, \ldots, n$, temos que

$$A_k = \sum_{i=1}^{r} y_{ik} A_i$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{r} y_{ik} A_i - A_k = 0$$

Mas isso quer dizer que os vetores

$$Y_k = \begin{pmatrix} -y_{1k} \\ -y_{2k} \\ \vdots \\ -y_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{k-ésima linha}$$

são soluções do sistema.

Como $Y_{r+1}, Y_{r+2}, \ldots, Y_n$ são linearmente independentes e a dimensão do espaço solução é exatamente $n-r$ vemos que êstes vetores formam uma base para o espaço solução de $AX = 0$. Por outro lado, se tivermos um vetor da forma

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{k-ésima linha}$$

que é uma solução do sistema, então $X_k = Y_k$ (por quê?). Assim, podemos enunciar

TEOREMA 3.4.19 - Considere o sistema $AX = 0$ e suponha que as colunas linearmente independentes de A são as r primeiras. Então, uma base para o espaço

olução do sistema $AX = 0$ pode ser achada fazendo-se, ucessivamente, $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0,\dots,x_n = 0$; $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1,\dots,x_n = 0$; $x_{r+1} = 0,\dots,x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$.

Já sabemos, assim, resolver um sistema homogêneo X = 0. Assim, para resolver o sistema $AX = B$, resta a- nar uma de suas soluções. Para isso, note que $AX = B$ ode ser escrito como

$$x_1A_1 + x_2A_2 +\dots+ x_nA_n = B$$

ı ainda $x_1A_1 + x_2A_2 +\dots+ x_nA_n - B = 0$. Desta maneira, ara encontrar uma solução de $AX = B$, é suficiente expri ir B como uma combinação linear de $A_1, A_2,\dots,A_n$.

KEMPLOS

.4.20: Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} 3x + y - 5z &= -1 \\ x - 2y + z &= -5 \\ x + 5y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

n primeiro lugar, devemos calcular o posto da matriz do istema:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -9 \\ -14 & 5 & 18 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

ɔr outro lado, consideremos a matriz aumentada do siste- ı e achemos seu posto

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & -9 & -5 \\ -14 & 5 & 18 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -9 & -7 \\ -14 & 5 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos assim que $\rho(A) = 2$ e $\rho(A') = 3$, logo o sistema não tem solução.

Seja agora o sistema

$$2x - 3y + 6z = 3$$
$$4x - y + 3 = 1$$
$$3x - 2y + 3z = 4$$

Já sabemos (ver Exemplo 3.4.7) que o posto de $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ é três. Achemos agora o posto da matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema tem solução. Para achá-lo, consi- eremos, em primeiro lugar, o sistema homogâneo associado

$$2x - 3y + 6z = 0$$

$$4x - y + z = 0$$

$$3x - 2y + 3z = 0$$

Como sua matriz tem posto 3, êle admite sòmente a olução trivial. Isso implica que a solução do sistema ião-homogêneo será única.

Para achar esta solução, verifiquemos que opera- ções elementares sôbre as colunas realizamos para redu- zir A'

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_2+B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{A_2+B}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1-3\left(\frac{A_2+B}{2}\right) \quad A_2 \quad (A_3+2A_2) \quad \frac{A_2+B}{2} \qquad\qquad A_1/2 - 3\left(\frac{A_2+B}{4}\right) \quad A_2 + A_2+B \quad A_3 + 2A_2 + \frac{(A_2+B)}{2} \quad \frac{(A_2+B)}{2}$$

donde concluimos que $3\{\frac{A_1}{2} - 3(A_2+B)/4\} + A_2 + (A_2+B) +$

$+ 5\{A_3 + 2A_2 + (A_2+B)/2\} = 0$ ou seja $\frac{3}{2} A_1 + \frac{49}{4} A_2 +$
$+ 5A_3 + \frac{5}{4} B = 0$ donde

$$B = -\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} A_1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{49}{4} A_2 - 5\cdot\frac{4}{5} A_3 = -\frac{6}{5} A_1 - \frac{49}{5} A_2 - 4 A_3$$

e assim a solução (única) do sistema é $(-\frac{6}{5}, -\frac{49}{5}, -4)$.

3.4.21: Resolvamos o sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 &= 11 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 5 & -2 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ e assim A tem posto 2.

Por outro lado, calculemos o posto da matriz aumentada A':

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 & -1 & 11 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 5 & 5 & -20 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad B \qquad\qquad A_1 + 5A_5 \quad A_2 + 2A_5 \quad A_3 \quad A_4 + (-3A_5) \quad B + 11A_5$$

assim $\rho(A') = \rho(A) = 2$.

Observe que $4A_3 + B + 11A_5 = 0$, logo $B = -4A_3 - 11A_5$ e obtivemos uma solução do sistema. Para achar ôdas suas soluções, resolvemos o sistema homogêneo asso-iado

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

Como $\rho(A) = 2$, vemos que a dimensão do espaço so-ução é $n-\rho(A) = 3$. Achamos que as duas colunas L.I. são primeira e a quinta; fazendo, sucessivamente, $x_2 = 1$, $_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $_4 = 1$, obteremos as soluções $(-1,1,0,0,-3)$, $(1,0,1,0,5)$ $(1,0,0,1,2)$ que formam uma base para o espaço solução o sistema homogêneo. Assim, a solução geral do sistema ão homogêneo será

$$(0,0,-4,0,-11) + t_1(-1,1,0,0,-3) + t_2(1,0,1,0,5) + \\ + t_3(1,0,0,1,2) .$$

OBSERVAÇÃO: Muitas vêzes, estudam-se os sistemas lineares realizando operações elementares sôbres as linhas da matriz do sistema; os resultados são análogos. Preferimos o método aqui exposto por ter conteúdo bem mais geométrico.

3.5 - Soma de transformações lineares

Já sabemos realizar uma operação sôbre transformações lineares: dadas $T:V \to U$ e $S:U \to W$, podemos formar a composta $S \circ T:V \to W$. Aprenderemos agora a efetuar outras operações sôbre transformações lineares.

DEFINIÇÃO 3.5.1 - Se $T,S:V \to U$ são transformações lineares entre espaços vetoriais, a soma de T e S, $T + S$ é a transformação de V em U definida por $(T+S)(v) = T(v) + S(v), \forall v \in V$.

É imediato verificar que $(T+S)$ é uma transformação linear: se $k_1,k_2 \in K$, $v_1,v_2 \in V$, $(T+S)(k_1v_1+k_2v_2) = T(k_1v_1 + k_2v_2) + S(k_1v_1 + k_2v_2)$ e como T e S são lineares $T(k_1v_1 + k_2v_2) + S(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + k_1S(v_1) + k_2S(v_2) = k_1(T(v_1) + S(v_1)) + k_2(T(v_2) + S(v_2)) = k_1(T+S)(v_1) + k_2(T+S)(v_2)$.

Além disso, é fácil ver que $T+S = S+T$.

EXERCÍCIO

3.5.2: Mostre que $T+S = S+T$.

Uma outra operação que podemos efetuar com transformações lineares é multiplicá-las por escalares.

DEFINIÇÃO 3.5.3 - Sejam V e W espaços vetoriais sôbre o corpo K e $T: V \to W$ uma transformação linear. Se $k \in K$ a <u>transformação produto</u> de k por T, kT, é definida por $(kT)(v) = kT(v), \forall v \in V$.

É também imediato que kT é uma transformação linear.

Observe que podemos agora somar duas transformações lineares e multiplicar uma transformação linear por um escalar. O fato importante relativo a estas operações está descrito abaixo.

TEOREMA 3.5.4 - Se V e W são espaços vetoriais sôbre um mesmo corpo K, o conjunto das transformações lineares de V em W é um espaço vetorial sôbre K, denotado por $L(V,W)$ onde as operações são as descritas em 3.5.1 e 3.5.3.

<u>Demonstração</u>: Deveríamos demonstrar tôdas as propriedades exigidas em 1.2.1 para definir um espaço vetorial. Faremos sòmente algumas, deixando as outras como exercícios.

A comutatividade da adição é o Exercício 3.5.2. Deixamos a associatividade como exercício, o mesmo acontecendo com as propriedades V3), V4) e V5). O elemento neutro em relação à adição de $L(V,W)$ é a transformação linear $0:V \to W$ tal que $0(v) = 0$, $\forall v \in V$. Observe que se $T \in L(V,W)$ (ou seja, T é uma transformação linear de V em W) então, $\forall v \in V$ $(1.T)(v) = 1.T(v) = T(v)$, isto é $1.T = T$. Defina $-T:V \to W$ por $(-T)(v) = -T(v)$, $\forall v \in V$. Vemos então que $-T$ é o negativo de T.

EXERCÍCIO

3.5.5: Complete a demonstração de 3.5.4.

Uma maneira importante de obter espaços vetoriais é a de construir $L(V,W)$, partindo de dois espaços V, W (que podem eventualmente ser iguais).

EXEMPLO

3.5.6: Se $V = R^2$, $W = R$, $L(V,W)$ é o conjunto das transformações lineares de R^2 em R, que são chamadas de funcionais lineares em R^2. Seja $\{e_1,e_2\}$ a base canônica do R^2 e φ_1, φ_2 os funcionais lineares definidos por $\varphi_1(e_i) = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \end{cases}$, $\varphi_2(e_i) = \begin{cases} 0 & i=1 \\ 1 & i=2 \end{cases}$.

Se $\varphi \in L(R^2,R)$ é um funcional linear arbitrário, então, $\forall v \in R^2$, $\varphi(v) = \varphi(xe_1 + ye_2) = x\,\varphi(e_1) + y\,\varphi(e_2)$. Por outro lado, $\varphi_1(v) = \varphi_1(x\,e_1 + y\,e_2) = x\,\varphi_1(e_1)+y\,\varphi_1(e_2)$.

x e $\varphi_2(v) = \varphi_2(x\ e_1 + y\ e_2) = x\ \varphi_2(e_1) + y\ \varphi_2(e_2) =$ y e assim $\varphi(v) = \varphi(e_1)\varphi_1(v) + \varphi(e_2)\varphi_2(v)$ ou seja, $= \varphi(e_1)\varphi_1 + \varphi(e_2)\varphi_2$ e desta maneira os funcionais φ_1 φ_2 geral o espaço $L(R^2,R)$. Êstes dois funcionais são ·nearmente independentes: com efeito, se $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 = 0$ ıtão, $\forall\, v \in R^2$, $k_1\varphi_1(v) + k_2\varphi_2(v) = 0$ e fazendo $v = e_1$ ›mos que $k_1 = 0$; da mesma maneira, vemos que $k_2 = 0$. emonstramos assim que $L(R^2,R)$ é um espaço vetorial de imensão 2.

XERCÍCIO

.5.7: Determine a dimensão de $L(R^3,R)$, o espaço vetorial dos funcionais lineares em R^3.

XEMPLO

.5.8: Sejam agora V e W espaços de dimensão n e m respectivamente. Tome bases $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ e $w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ de V e W e defina as transformações ineares

$$T_{ij}: V \to W \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n \end{array}$$

$$v_k \longmapsto w_i \qquad k=j$$

$$v_k \longmapsto 0 \qquad k\neq j$$

ssim, por exemplo se $\dim V = 3$, $\dim W = 2$, $T_{12}: V \to W$ tal que $v_1 \mapsto 0$, $v_2 \to w_1$, $v_3 \to 0$, T_{13} fica definida por

$v_1 \mapsto 0$, $v_2 \mapsto 0$, $v_3 \mapsto w_1$, enquanto que T_{21} é tal que $v_1 \mapsto w_2$, $v_2 \mapsto 0$, $v_3 \mapsto 0$.

Se $T \in L(V,W)$, e $v \in V$, então $T(v) = T(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k) =$
$= \sum_{k=1}^{n} x_k \, T(v_k) = \sum_{s=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} a_{sk} \, x_k) w_s = \sum_{s=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} a_{sk} \, T_{sk}(v))$
ou seja as aplicações lineares T_{sk}, $s=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,n$ geram $L(V,W)$. É fácil ver (faça-o!) que elas são linearmente independentes, e isso mostra que $L(V,W)$ tem dimensão $m \times n$.

EXERCÍCIOS

3.5.9: No exemplo acima, se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, ache as matrizes $T_{ij}]_{\beta'}^{\beta}$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

3.5.10: Mostre que as transformações T_{ij} definidas acima são linearmente independentes.

Já sabemos que, dada $T \in L(V,W)$, e fixadas bases β e β' em V e W respectivamente, então T determina uma matriz $T]_{\beta'}^{\beta}$ com coeficientes em K. Se V tem dimensão n e W dimensão m, obtemos assim uma função θ de $L(V,W)$ em $M_k(m \times n)$, o conjunto das matrizes $m \times n$ com coeficientes em K. Afirmamos que θ é uma bijeção. Com efeito, qualquer matriz $A \in M_k(m \times n)$ determina uma transformação linear $T_A : V \to W$ e é imediato ver que $T_A]_{\beta'}^{\beta} = A$. Por outro lado, se $\theta(T_1) = \theta(T_2)$, então

$T_1]_{\beta'}^{\beta} = T_2]_{\beta'}^{\beta}$, e assim $T_1 = T_2$ (prove isso!).

A função θ acima é mais que uma bijeção: em primeiro lugar, se $T:V \to U$ e $S:U \to W$ são transformações lineares, β, β' e β'' são bases em V, U e W com n, m e s elementos respectivamente, então $\theta(S \circ T) = \theta(S) \cdot \theta(T)$ (isso é nada mais nada menos que o Lema 3.1.15). Em verdade, estamos sendo descuidados e usando a mesma letra θ para indicar as funções $L(V,W) \to M_k(s \times n)$ $L(V,U) \to M_k(m \times n)$ e $L(U,W) \to M_k(s \times m)$. Além disso, se $T,S:V \to W$ são transformações lineares, então $\theta(T+S) = \theta(T) + \theta(S)$ e $\theta(kT) = k\, \theta(T)$. Assim θ é uma bijeção que preserva as operações de $L(V,W)$ e $M_k(m \times n)$, ou seja, ela respeita as estruturas de espaços vetoriais de $L(V,W)$ e $M_k(m \times n)$ e faz corresponder à composição de funções o produto de matrizes.

EXEMPLOS

3.5.11: Seja V um espaço vetorial, V_1 e V_2 subespaços vetoriais de V tais que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e que se $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Então, existe um isomorfismo $T:V \to V_1 \oplus V_2$. Com efeito, se $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, com $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$ então $v_1 - v_1' = v_2' - v_2$ logo $v_1 - v_1' \in V_1 \cap V_2$ pois $v_2' - v_2 \in V_2$ e assim $v_1 - v_1' = 0$ donde $v_1 = v_1'$. Semelhan-

temente $v_2 = v'_2$ logo todo vetor v de V se escreve de maneira única como uma soma de um vetor de V_1 e de um vetor de V_2. Definamos, agora, $T: V \to V_1 \oplus V_2$ como segue. Se $v \in V$, escreva $v = v_1+v_2$ e ponha $T(v) = T(v_1+v_2) = (v_1,v_2) \in V_1 \oplus V_2$. Como a expressão de v como soma de um vetor de V_1 com um vetor de V_2 é única T está bem definida. Se $v' \in V$, $v' = v_1'+v_2'$, então $T(kv+k'v') = T(kv_1+kv_2 + k'v_1'+k'v_2') = T(kv_1+k'v_1' +kv_2+k'v_2') = (kv_1+k'v_1', kv_2+k'v_2') = k(v_1,v_2) + k'(v_1',v_2') = kT(v) + k'T(v')$ e isso mostra que T é linear. É fácil ver que $S: V_1 \oplus V_2 \to V$ dada por $S(v_1,v_2) = v_1+v_2$ é a transformação inversa de T e o teorema fica demonstrado.

3.5.12: Se $T_1: V_1 \to W_1$, $T_2: V_2 \to W_2$ são transformações lineares, podemos definir $T: V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$ pela regra $T(v_1,v_2) = (Tv_1,Tv_2)$. É fácil verificar que T é uma transformação linear, geralmente denotada por $T_1 \oplus T_2$ e chamada de soma direta de T_1 e T_2.

EXERCÍCIO

3.5.13: Sejam $T_1: V_1 \to W_1$ e $T_2: V_2 \to W_2$ transformações lineares. Se α_1 e α_2 são bases de V_1 e V_2 respectivamente, β_1 e β_2 bases de W_1 e W_2, ache, em função de $T_1]_{\beta_1}^{\alpha_1}$, $T_2]_{\beta_2}^{\alpha_2}$, a matriz de $T_1 \oplus T_2$ em relação às bases $\alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\beta_1 \oplus \beta_2$.

CAPÍTULO 4

PRODUTOS INTERNOS

Passamos, neste capítulo, a introduzir mais estru-ura nos espaços vetoriais; ensinaremos, agora, como "me-ir distâncias" neles. Todos os espaços vetoriais conside-ados serão reais ou complexos.

.1 - A definição de produto interno. Generalidades

EFINIÇÃO 4.1.1 - Seja V um espaço vetorial sôbre o corpo real ou complexo, denotados por K.

m produto interno sôbre V é uma função de $V \times V$ em K, scrita $(,)$ e tal que:

.) $\forall u, v \in V$, então $(u,v) = \overline{(v,u)}$

) $\forall u, v \in V, k \in K$, temos que $(ku,v) = k(u,v)$

) $\forall u,v, w \in V$, vem que $(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$.

) $\forall u \in V$, (u,u) é um número real não negativo; além disso, $(u,u) = 0$ se e sòmente se $u = \hat{0}$

XEMPLOS

.1.2: Seja $V = R^2$ e a função de $V \times V$ em R definida

por $(u,v) = x_1x_2 + 3y_1y_2$, quando $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$. Em primeiro lugar, 1), 2) e 3) são fàcilmente verificados. Para verificar 4) note que se $u = v = (x,y)$, temos que $(u,v) = x^2 + 3y^2 \geq 0$ e $x^2 + 3y^2 = 0$ se e sòmente se $x = y = 0$.

4.1.3: Se $V = R^3$ e $(,):V\times V \to R$ é dado por $(u,v) =$
$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, onde $u = (x_1,x_2,x_3)$, $v = (y_1,y_2,y_3)$, vemos, também sem dificuldades, que $(,)$ será um produto interno em R^3.

4.1.4: Seja $V = C^2$ e $u = (x_1,x_2)$, $v = (y_1,y_2)$, $u,v \in C^2$.
Defina $(,):V\times V \to C$ por $(u,v) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$.
Observe que $(v,u) = y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 = \overline{(x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2)} = \overline{(u,v)}$ ou seja $(u,v) = \overline{(v,u)}$. As propriedades 2) e 3) verificam-se sem problemas. Observe, além disso, que $(u,u) =$
$= (x_1\bar{x}_1 + y_1\bar{y}_1) = |x^2| + |y^2| \geq 0$ e $(u,u) = 0$ se e sòmente se $u = 0$.

4.1.5: Considere agora $V = R^2$ e $(,):V\times V \to R$ dada por
$(u,v) = x_1y_1 - 3x_2y_2$. É fácil ver então que 1), 2) e 3) são verdadeiros, mas o mesmo não acontece com 4): com efeito, $(u,u) = x_1^2 - 3x_2^2$ e não podemos garantir que $x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$ (por quê? faça $x_1 = x_2 = 1$), logo $x_1y_1 - 3x_2y_2$ não define um produto interno em R^2.

4.1.6: Tomemos $V = C^2$ e $(,):V\times V \to C$ dada por $(u,v) =$

$x_1y_1 + x_2y_2$. Verificam-se, sem problemas, as proprieda-
es 2) e 3), mas 1) e 4) não são verdadeiras (mostre-o!).

.1.7: Já vimos que o conjunto C das funções contínuas $f:R \to R$ constitue um espaço vetorial com as operações de soma de funções e de multiplicação de uma função or um número real. Definiremos, neste espaço, um produto nterno pondo $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. As propriedades 1),) e 3) são fáceis de verificar. Por outro lado, note que $f,f) = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt \geq 0$ e esta integral nula se e sòmente se f é a função constante nula, o ue demonstra 4) (você é capaz de demonstrar formalmente), para êste caso? lembre-se da definição de função con-ínua).

.1.8: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, tome $u_1, u_2, \ldots, u_n$ uma base para V e definamos $,):V\times V \to C$ por $(u,v) = \Sigma a_i \bar{b}_i$, onde $u = \Sigma a_i u_i$ e $= \Sigma b_i u_i$. Deixamos a cargo do leitor verificar que isso efine um produto interno sôbre V.

XERCÍCIO

.1.9: Mostre que, se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então existe sempre um produto interno lefinido sôbre V.

De agora em diante, mesmo sem indicação explícita,

consideraremos todos os espaços vetoriais de dimensão finita dotados de um produto interno.

EXEMPLO

4.1.10: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica 2X2 (isto é, tal que $a_{12} = a_{21}$) com coeficientes reais, e.g., $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, etc.

Defina $(,):R^2 \times R^2 \to R$ pela regra $(u,v) \mapsto (x_1,y_1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, onde $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$.

É fácil verificar que $(,)$ satisfaz as condições 1), 2), 3). Procuremos condições para que $(,)$ seja um produto interno sôbre R^2.

Se $u = (x,y)$, $(u,u) = (x,y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11} \left\{ \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}} y \right)^2 + \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)y^2}{a_{11}^2} \right\}$ donde se segue que $(,)$ define um produto interno se e sòmente se $a_{11} > 0$ e $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

DEFINIÇÃO 4.1.11 - Seja V um espaço vetorial com produto interno $(,)$ e $u \in V$. A <u>norma</u> ou módulo de u, $\|u\|$, é o número real não negativo $\sqrt{(u,u)}$.

XERCÍCIOS

.1.2: Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e considere os produtos internos que estas matrizes definem sôbre R^2 (veja 4.1.10). Ache a norma do vetor (1,2) em re-ação a ambos os produtos internos. Êste exercício deixa laro que a norma de um vetor depende do produto interno ue estiver sendo usado.

.1.13: Se V é o espaço vetorial das funções contínuas $f:R \to R$ com o produto interno

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ache a norma dos seguintes vetores de V:

a) $f(t) = e^t$

b) $g(t) = \cos t$

c) $h(t) = \text{sen } t$

d) $w(t) = 1$

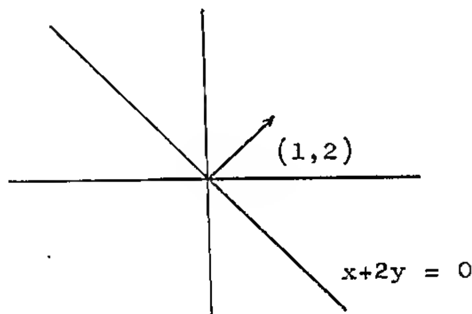
e) $z(t) = t$

Já introduzimos a noção de comprimento (norma) de um vetor. Ensinamos, agora, a reconhecer vetores ortogonais.

DEFINIÇÃO 4.1.14 - Se V é um espaço vetorial com produto interno (,), dizemos que $u,v \in V$ são <u>ortogonais</u> se e sòmente se $(u,v) = 0$.

EXEMPLO

4.1.15: Seja $V = R^2$ e $u = (1,2)$. Achemos os vetores $v \in R^2$ tais que $(u,v) = 0$. Se $v = (x,y)$, então $(u,v) = x+2y$ (estamos supondo o produto interno $x_1y_1 + x_2y_2$) e assim v é ortogonal a u se e sòmente se $x+2y = 0$.



LEMA 4.1.16 - Se V é um espaço vetorial com produto interno $(\,,\,)$ e $v \in V$, o conjunto $\{v\}^{\perp} = \{u \in V \mid (u,v)=0\}$ é um subespaço vetorial de V.

<u>Demonstração</u>: Sejam $u_1, u_2 \in \{v\}^{\perp}$, então $(u_1,v) = (u_2,v) = 0$, logo se $k_1, k_2 \in K$, $(k_1u_1,v) = (k_2u_2,v) = 0$ logo $(k_1u_1 + k_2u_2, v) = 0$, o que conclui a demonstração.

DEFINIÇÃO 4.1.18 - Se V é um espaço vetorial e $v \in V$, o <u>complemento ortogonal</u> de v é o subespaço $\{v\}^{\perp} = \{u \in V \mid (u,v)=0\}$.

EXERCÍCIOS

4.1.19: Se v_1 e v_2 são vetores ortogonais não nulos de um espaço V com produto interno $(,)$, então v_1 e v_2 são linearmente independentes.

4.1.20: Considere P_n o espaço vetorial dos polinômios reais de grau $\leq n$ e defina $(p(t),q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$; verifique que $(,)$ é um produto interno e ache os complementos ortogonais dos vetores 1 e t respectivamente.

DEFINIÃO 4.1.20 - Seja V um espaço vetorial e $u,v \in V$. Os vetores u e v são ortonormais se $\|u\| = \|v\| = 1$ e $(u,v) = 0$.

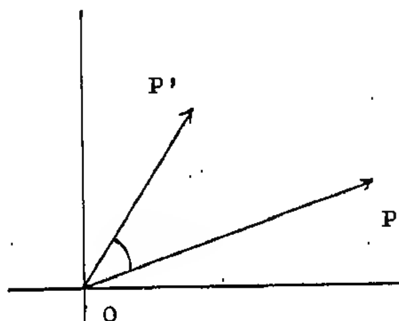
EXERCÍCIO

4.1.21: Mostre que se $v \in V$, então $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$.

Observaremos, de passagem, o seguinte fato relativo ao produto interno usual no R^2: se $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$, então $x_1y_1 + x_2y_2 = \|u\| \|v\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo formado por u e v.

Com efeito, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OPP', vemos que $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta$, mas $\|u-v\|^2 = ((x_1-y_1,x_2-y_2),(x_1-y_1,x_2-y_2)) = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, $\|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\|v\|^2 = y_1^2+y_2^2$ e assim $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 = x_1^2 + x_2^2 +$

$+ y_1^2 + y_2^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta$ donde $(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 =$
$= \|u\|\ \|v\| \cos\theta.$



É um fato bem conhecido que, no plano, o comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma dos comprimentos dos outros lados. Êste fato generaliza-se:

TEOREMA 4.1.22 (<u>Desigualdade de Cauchy-Schwartz</u>): Se u e v são vetores de um espaço vetorial com produto interno $(,)$ então $|(u,v)| \leq \|u\|\ \|v\|$.

<u>Demonstração</u>: Se $v = 0$, a desigualdade se verifica trivialmente. Suponhamos, portanto, que $v \neq 0$ e vem então que, para $t \in R$, $0 \leq \|u-(u,v)tv\|^2 =$
$= (u-(u,v)tv,\ u-(u,v)tv) = (u,u) - t(\overline{u,v})(u,v) - t(u,v)(v,u) +$
$+ t^2(u,v)(\overline{u,v})(v,v) = \|u\|^2 - 2t|(u,v)|^2 + |(u,v)|^2t^2\|v\|^2.$
Fazendo agora $t = \dfrac{1}{\|v\|^2}$, vemos que $0 \leq \|u\|^2 - \dfrac{|(u,v)|^2}{\|v\|^2}$ e assim $|(u,v)|^2 \leq \|u\|^2\ \|v\|^2$ donde $|(u,v)| \leq \|u\|\ \|v\|$.

EXEMPLOS

4.1.23: Se $V = R^2$ e $(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2$ para

ı $= (x_1,x_2)$, $v = (u_1,y_2)$, então $|x_1y_1 + x_2y_2| \leq$
: $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.

ł.1.24: Considere V o espaço vetorial das funções contí-
nuas definidas no intervalo $[0,1]$ com as opera-
ções usuais e o produto interno dado por

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ıntão, a desigualdade de Cauchy garante que

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^1 g^2(t)dt\right)$$

Usando a desigualdade de Cauchy, podemos demonstrar
ı seguinte:

'EOREMA 4.1.25 - Se $u,v \in V$, então $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

emonstração: $\|u+v\|^2 = (u+v,u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) =$
$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u,v) + (v,u) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 +$
$2|(u,v)| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\|+\|v\|)^2$ e como
stamos lidando com números não negativos segue-se que
$u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

XERCÍCIOS

.1.26: Se $u,v \in V$, e $(u,v) = 0$, então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 +$
$+ \|v\|^2$. Além disso, se V é um espaço vetorial
al, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ implica que $(u,v) = 0$. Mos-
re, por meio de um exemplo, que a segunda parte do exer-

ício não é verdadeira para espaços complexos.

.1.27: Se V é um espaço vetorial real e com produto in terno $(,)$ então $(u,v) = \frac{1}{2}\{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\}$, ara todo u e $v \in V$.

.1.28: Se $u,v \in V$, então $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. Interprete geomètricamente no plano.

.1.29: Dados $u,v \in V$, defina a distância d entre u e v por $d(u,v) = \|u-v\|$. Mostre que, $\forall u,v,w \in V$, então $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$, $d(u,v) = d(v,u)$ e $d(u,u) \geq 0$.

DEFINIÇÃO 4.1.30 - Seja V um espaço vetorial com produto interno. Uma base β de V é dita ortogonal se é constituida por vetores ortogonais entre si; isto é, se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então $(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$.

EXERCÍCIOS

4.1.31: Ache bases ortogonais para o R^2 e para o R^3.

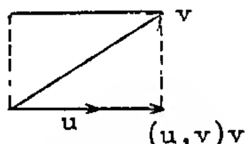
4.3.32: Considere o subespaço V de R^4 gerado pelos vetores $(1,1,0,0)$, $(0,1,2,0)$ e $(0,0,3,4)$. Verifique se êstes vetores formam uma base para V. Caso isso aconteça, teste se é uma base ortogonal.

NIÇÃO 4.1.33 - Seja V um espaço vetorial com produto interno. Uma base β de V é ortonormal se é constituida por vetores unitários (i.e. de ılo um) e ortogonais entre si.

4.1.34 - Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal para o espaço vetorial V, então $= \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ é uma base ortonormal para V.

onstração: Em primeiro lugar, é óbvio que β' é uma base de V (prove isso). Por outro lado, $v \in V$, $v \neq 0$, então o vetor $u = \frac{v}{\|v\|}$ tem norma unia. Além disso, se $u, v \in V$ e $(u,v) = 0$, então, $,k_2 \in K$ $(k_1u, k_2v) = 0$ pois $(k_1u, k_2v) = k_1(u, k_2v) =$ $_1\bar{k}_2(u,v) = k_1\bar{k}_2 0 = 0$ e o lema fica assim demonstrado.

Consideremos o plano R^2 com o produto interno u-l $x_1x_2 + y_1y_2 = \|u\| \|v\| \cos\theta$, se $\|u\| = 1$, então $v) = \|v\| \cos\theta$ e $(u,v)u$ é a componente de v na eção de u.



erve que v pode ser decomposto na soma de dois veto ortogonais; um na direção de u, $(u,v)u$, que pertence subespaço gerado por u e outro, $v-(u,v)u$, ortogonal u: com efeito, $(v-(u,v)u, u) = (v,u) - (u,v)(u,u) = 0$.

e v e u são linearmente independentes, então
- $(u,v)u$ é não nulo (por quê?).

No espaço R^3, também com o produto interno usual, ejam v_1, v_2 e v três vetores linearmente independen-es e tais que $\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = 1$ e $(v_1,v_2) = 0$. Pode-ios então projetar v sôbre v_1 e v_2. A soma dessas uas projeções, $(v,v_1)v_1 + (v,v_2)v_2$ é a componente de no plano determinado por v_1 e v_2. Como anteriormen-e, o vetor $v - (v,v_1)v_1 - (v,v_2)v_2$ será ortogonal ao ubespaço gerado por v_1 e v_2: $(v,v_i) = (v-(v,v_1)v_1 - (v,v_2)v_2,v_i) = (v,v_i) - (v,v_1)(v_1,v_i) - (v,v_2)(v_2,v_i) = 0$, para $i=1,2$.

XERCÍCIO

.1.35: Seja V um espaço vetorial com produto interno, e U o subespaço de V gerado pelos vetores $v_1,v_2,\ldots,v_s$. Então, se $v \in V$, v é ortogonal a um vetor qualquer de U se e sòmente se v é ortogonal a $v_1,v_2,\ldots,v_s$.

4.1.36: Se $u = (1,2)$, $v = (1,1)$ ache a projeção de u na direção do subespaço gerado por v.

4.1.37: Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ uma base ortonormal para V. Então, se $v = \Sigma x_i v_i$, mostre que $x_i = (v,v_i)$.

Baseados na situação do R^2 e do R^3 definimos, e maneira geral, a projeção de um vetor sôbre um subespa o.

EFINIÇÃO 4.1.38 - Se V é um espaço vetorial com produto interno e $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$ são etores ortogonais dois a dois, a projeção de $v \in V$ sôre o subespaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_s$ é o vetor

$$v, v_1) \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + (v, v_2) \frac{v_2}{\|v_2\|^2} + \ldots + (v, v_s) \frac{v_s}{\|v_s\|^2}.$$

É trivial obter, a partir de uma base ortogonal de m espaço V uma base ortonormal para o mesmo espaço. O eguinte resultado ensina a achar uma base ortogonal em m espaço vetorial com produto interno:

EOREMA 4.1.39 - (Processo de Gram-Schmidt):

Se V é um espaço vetorial com produto nterno e $v_1, v_2, \ldots, v_s$ são vetores linearmente indepenentes em V, é possível achar vetores $u_1, u_2, \ldots, u_s$ que ão ortogonais dois a dois (isto é, $(u_i, u_s) = 0$ se $i \neq s$) que são também uma base para o subespaço gerado por $_1, v_2, \ldots, v_s$.

emonstração: A demonstração é análoga ao que fizemos acima para o R^2 e R^3 e se faz por indução: onha $u_1 = v_1$ e suponhamos que já foram encontrados os

ores $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$; defina então:

$$u_s = v_s - \sum_{i<s} \frac{(v_s, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i .$$

$\ell < s$, $(u_s, u_\ell) = (v_s, u_\ell) - \sum_{i<j} \frac{(v_s, u_i)}{\|u_i\|^2} (u_i, u_\ell)$ e a
pótese de indução nos garante que $(u_i, u_\ell) = 0$ se
$\neq \ell$, logo $(u_s, u_\ell) = (v_s, u_\ell) - (v_s, u_\ell) = 0$.

Como, por indução, $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ geram o mesmo
bespaço que $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ e u_s é linearmente inde-
ndente de $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ vem que $u_s \neq 0$; é também
vio que o subespaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_s$ é o mesmo
e aquêle gerado por $u_1, u_2, \ldots, u_s$ (você é capaz de pro
r esta última afirmação?).

ROLÁRIO 4.1.40 - Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, é sempre possível encon-
ar em V uma base ortonormal.

emonstração: Tome uma base arbitrária $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V e, usando o teorema, ache uma base orto-
onal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ para V; é, então, fácil obter uma
ase ortonormal, dividindo cada vetor u_i por sua norma.

É importante perceber a necessidade de 4.1.40. Da-
o um espaço vetorial V nada nos garante, a priori, a
xistência nele de vetores ortogonais entre si e que for-
am uma base para V. O corolário serve exatamente para

garantir tal fato.

EXEMPLO

4.1.41: Achar, em R^4 uma base ortonormal para o subespaço gerado por $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,2,0)$, e $v_3 = (0,0,3,4)$.

Ponha $u_1 = (1,1,0,0)$; então, $u_2 = v_2 - \frac{(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 =$
$= (0,1,2,0) - \frac{1}{2}\ (1,1,0,0) = (-1/2,\ 1/2,\ 2,0)$.

$u_3 = v_3 - \frac{(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2} u_2 = (0,0,3,4) - \frac{0}{\|u_1\|^2} -$
$- \frac{6}{9/2}\ (-1/2,\ 1/2,\ 2,\ 0) = (0,0,3,4) - (-4/6,4/6,8/3,0) =$
$= (2/3,\ -2/3,1/3,4)$, e assim

$u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (-1/2,1/2,2,0)$, $u_3 = (2/3,-2/3,1/3,4)$

4.1.42: Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 e tome o produto interno dado por

$$(p(t),q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt\ .$$

Podemos achar uma base ortogonal para P_2 como segue: partimos da base $1,t,t^2$ e pomos $u_1 = 1$; então

$u_2 = t - \frac{(t,1)}{\|1\|^2} 1 = t$, pois $(t,1) = \int_{-1}^{1} tdt = 0$ e
$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$. Por outro lado, $u_3 = t^2 - \frac{(t^2,1)}{\|1\|^2} 1 -$
$- \frac{(t^2,t)}{\|t\|^2} t$ e como $(t^2,1) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = 2/3$, $(t^2,t) =$

$= \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0$, vem que $u_3 = t^2 - 1/3$.

Se desejarmos uma base ortonormal para P_2 é suficiente tomar $\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}(t^2-1/3)$.

EXERCÍCIO

4.1.43: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $(,)$ e $e_1, e_2, \ldots, e_n$ é uma base ortogonal de V, então $\forall u,v \in V$, $(u,v) = \Sigma x_i \bar{y}_i$, onde $u = \Sigma x_j e_j$, $v = \Sigma y_j e_j$.

A noção de complemento ortogonal estudada em 4.1.17 pode ser generalizada.

DEFINIÇÃO 4.1.44 - Seja $S \subseteq V$ um subconjunto do espaço vetorial V. O complemento ortogonal de S, $S^\perp$ é o conjunto dos vetores de V que são ortogonais aos vetores de S, i.e., $S^\perp = \{v \in V \mid (v,s)=0, \forall s \in S\}$.

LEMA 4.1.45 - Se $S \subseteq V$, então $S^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Se $v_1, v_2 \in S^\perp$, então $(v_1,s) = (v_2,s) = 0$, $\forall s \in S$; mas assim $(k_1 v_1 + k_2 v_2, s) = 0$, $\forall s \in S$. Por outro lado, $S^\perp$ é não vazio, pois $0 \in S^\perp$ e a demonstração fica concluida.

EXEMPLO

4.1.46: Seja $V = R^3$ e $S = \{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1,1,1)$ e

= (1,0,0). Vemos então que $v \in S^{\perp}$ se e sòmente se ,$v_1) = (v,v_2) = 0$ ou seja $x+y+z = 0$, $x = 0$.

sta maneira $S^{\perp} = [(0,1,-1)]$.

ERCÍCIO

1.47: Se $V = P_3$, ache o complemento ortogonal de $S = \{1,t,1+t^2\}$; o produto interno é $(p(t),q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

EMPLO

1.48: Se $U \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V, então qualquer vetor de V se escreve, de maneira úni., como soma de um vetor de U e de um vetor de $U^{\perp}$.

m efeito, se $v \in V$, seja v_1 a projeção de v sôbre (o que é essa projeção?) e $v_2 = v-v_1$; vemos então que $u \in U$, $(v_2,u) = (v-v_1,u) = (v,u) - (v_1,u) = 0$. (Por ıê? você seria capaz de demonstrar isso?) logo $v_2 \in U^{\perp}$ assim $v = v_1+v_2$. Por outro lado, se $v = v_1' + v_2'$, m $v_1' \in u$, $v_2' \in U^{\perp}$ segue-se que $v_1'+v_2' = v_1+v_2$ donde $v_1'-v_1 = v_2-v_2'$ e como $v_1' - v_1 \in U$, $v_2 - v_2' \in U^{\perp}$ vem ıe $v_1' - v_1 \in U^{\perp}$ logo $(v_1'-v_1, v_1'-v_1) = 0$ (por quê?) e sso mostra que $v_1' = v_1$. Da mesma maneira, $v_2' = v_2$. Se $= \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $\beta' = \{u_1',u_2',\ldots,u_s'\}$ são bases de U $U^{\perp}$ respectivamente, então $\beta'' = \{u_1,u_2,\ldots,u_n,u_1',\ldots,u_s'\}$ uma base de V. Com efeito, o fato de que os vetores de

β'' geram V segue-se das considerações acima (por quê? dado $v \in V$, escreva $v = v_1+v_2$ com $v_1 \in U$, $v_2 \in U^{\perp}$ e exprima v_1 e v_2 como combinações lineares de elementos de β e β' respectivamente). Como $0 = 0+0$, e $0 \in U$, $0 \in U^{\perp}$, segue-se que $u_1,u_2,\ldots,u_n,u'_1,\ldots,u'_s$ são linearmente independentes (por quê? use a unicidade da decomposição de um vetor de V em um elemento de U mais um elemento de $U^{\perp}$).

4.2 - Funcionais lineares e sua representação

DEFINIÇÃO 4.2.1 - Se V é um espaço vetorial sôbre um corpo K, um <u>funcional linear</u> $\alpha: V \to K$ é uma traneformação linear entre os ospaços vetoriais V e K, ou seja, é uma função $\alpha: V \to K$ tal que

1) $\forall\, v_1,v_2 \in V$, $\alpha(v_1+v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$
2) $\forall\, k \in K$, $v \in V$, $\alpha(kv) = k\alpha(v)$

EXERCÍCIOS

4.2.2: Mostre que se existe $v \in V$ tal que $\alpha(v) = 1$, então o funcional linear α é sobrejetor.

4.2.3: Mostre que a função $\pi_1: R^2 \to R$ dada por $\pi_1(x,y) = x$ é um funcional linear. É sobrejetor? é injetor?

4.2.4: Mostre que se V é de dimensão n, $n > 1$, e $\alpha : V \to K$ é um funcional linear, então α não pode ser injetor (use o teorema do núcleo e da imagem).

4.2.5: Se V é um espaço vetorial de dimensão n, e $\alpha : V \to K$ é um funcional linear não nulo, então $\dim N(\alpha) = (n-1)$ (isto é, a dimensão do núcleo de α é $n-1$).

EXEMPLO

4.2.6: Seja V um espaço vetorial e $u \in V$; consideremos a função $\psi_u : V \to K$ dada por $\psi_u(v) = (v,u)$. É fácil ver que ψ_u é um funcional linear: $\psi_u(v_1+v_2) = (v_1+v_2,u) = (v_1,u) + (v_2,u) = \psi_u(v_1) + \psi_u(v_2)$ e $\psi_u(kv) = k\psi_u(v)$. Observe que se $u \neq 0$, então ψ_u não é o funcional linear nulo, i.e., aquêle que toma o valor zero para todo vetor de V (você é capaz de provar esta última afirmação?).

Ainda na mesma linha do Exemplo 4.2.6, seja $u = (1,2,-1) \in R^3$; então se $v \in R^3$, $\psi_u(v) = (v,u) = x + 2y - z$.

Já sabemos que uma transformação linear $T : V \to W$ onde V é um espaço de dimensão finita fica perfeitamente determinada se conhecemos como T transforma os vetores de uma base de V. Êste resultado vale òbviamente para os funcionais lineares.

EXEMPLO

4.2.7: Seja V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base para V. Representemos um vetor $v \in V$ por suas coordenadas (x_1, x_2, x_3) em relação a β. Considere o funcional $\psi: V \to R$ tal que $\psi(v_1) = 2$, $\psi(v_2) = 1$, $\psi(v_3) = -4$. Então, se $v \in V$, $\psi(v) = \psi(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = x_1\psi(v_1) + x_2\psi(v_2) + x_3\psi(v_3) = 2x_1 + x_2 - 4x_3$.

Já vimos também como somar transformações lineares e como multiplicar uma transformação linear por um escalar. Isso vale, é claro, para funcionais lineares, que são um tipo particular de transformações lineares.

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base para V, defina os funcionais lineares $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ por

$$\psi_i(v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Afirmamos que um funcional linear arbitrário ψ é uma combinação linear de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Com efeito considere os escalares $k_1 = \psi(v_1), \ldots, k_n = \psi(v_n)$. Mostraremos que $\psi = \sum_{i=1}^{n} k_i\psi_i$; já sabemos que é suficiente demonstrar que $\psi(v_j) = (\sum_{i=1}^{n} k_i\psi_i)(v_j)$, $j=1,2,\ldots,n$ (por quê?). Mas $\psi(v_j) = k_j$ e $(k_1\psi_1 + \ldots + k_n\psi_n)(v_j) = k_1\psi_1(v_j) + \ldots +$

$k_i\, \psi_i(v_j) + \ldots + k_n \psi_n(v_j) = k_j$ e assim fica demonstrado que desejávamos.

Já vimos que, para $u \in V$, $\psi_u(v) = (v,u)$ determi um funcional linear. O resultado abaixo garante que to s os funcionais lineares $\psi: V \to K$ podem ser obtidos sta forma.

OREMA 4.2.8 (teorema da representação dos funcionais lineares) - Seja V um espaço vetorial com oduto interno $(,)$ sôbre um corpo K e $\psi: V \to K$ um fun onal linear. Então existe um único vetor $u_\psi \in V$ tal ue, para todo $v \in V$, $\psi(v) = (v, u_\psi)$.

emonstração: Suponhamos, por um momento, que u_ψ existe e vejamos que vetor deveria ser: tomemos na base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para V e seja $= \Sigma x_i e_i$; se $\psi(v) = (v, u_\psi)$, em particular $\psi(e_j) = (e_j, u_\psi) = (e_j, \Sigma x_i e_i) = \Sigma \bar{x}_i (e_j, e_i) = \bar{x}_j$ e assim $x_i = \overline{\psi(e_i)}$, $i=1,2,\ldots,n$. Agora, para provar a existência de podemos definir $u_\psi = \Sigma \overline{\psi(e_i)} e_i$ e segue-se imediatamente que $\psi(v) = (v, u_\psi)$ (prove isso!).

Para a unicidade, note que se $\psi(v) = (v, u_\psi) = (v, u'_\psi)$, com $u_\psi \neq u'_\psi$ vem que $(v, u_\psi - u'_\psi) = 0$, $\forall v \in V$. m particular, fazendo $v = u_\psi - u'_\psi$, segue-se que $u_\psi - u'_\psi = 0$, ogo $u_\psi = u'_\psi$.

EXEMPLO

4.2.9: Daremos, agora, outra demonstração mais geométrica dêste teorema; suponha que ψ não é o funcional nulo e seja N o núcleo de ψ. Como $\dim N = n-1$, segue-se que $\dim N^{\perp} = 1$ (por quê?). Seja portanto $v_0 \in N^{\perp}$, $v_0 \neq 0$ e $\|v_0\| = 1$; se $v \in V$, podemos por

$$v = v - \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 + \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0$$

e note que

$$v_1 = v - \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 \in N, \quad v_2 = \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)} v_0 \in N^{\perp}.$$

Por outro lado,

$$(v,v_0) = (v_1+v_2,v_0) = (v_1,v_0) + (v_2,v_0) = \frac{\psi(v)}{\psi(v_0)}.$$

Assim, se tomarmos para u_ψ o vetor $\overline{\psi(v_0)}v_0$ vemos que $\psi(v) = (v, \overline{\psi(v_0)}v_0)$ e o teorema está demonstrado.

EXERCÍCIO

4.2.10: Se $\psi: R^3 \to R$ é dado por $\psi(x,y,z) = 3x+2y-z$, ache v_0 tal que $\psi(v) = (v,v_0)$.

EXEMPLO

4.2.11: Seja $\psi = P_2 \to R$ dado por $\psi(p(t)) = p'(1)$; assim por exemplo, $\psi(t^3 + 2t^2 - 4t + 3) = 6$. Se o produto interno em P_2 é dado por $(p(t),q(t)) =$

$\int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$, ache o vetor v_0 que representa ψ.

Uma solução para o exemplo é tomar uma base ortoonal para P_2 e aplicar a ela o método usado na demonsração do teorema. Mas o exercício pode ser atacado direamente como segue: se $v_0 = a_0t^2 + a_1t + a_2$, vemos que $(v) = (v,v_0) = a_0(v,t^2) + a_1(v,t) + a_2(v,1)$. O nosso prolema é determinar a_0, a_1, a_2.

Fazendo v sucessivamente igual a 1, t, t^2, teos que

$$\psi(1) = a_0(1,t^2) + a_1(1,t) + a_2(1,t)$$
$$\psi(t) = a_0(t,t^2) + a_1(t,t) + a_2(t,1)$$
$$\psi(t^2) = a_0(t^2,t^2) + a_1(t^2,t) + a_2(t^2,1)$$

omo $\psi(1) = 0$, $\psi(t) = 1$, $\psi(t^2) = 2$ e

$\int_{-1}^{1} t^2dt = 2/3$, $\int_{-1}^{1} tdt = 0$, $\int_{-1}^{1} dt = 2$, $\int_{-1}^{1} t^3dt = 0$,

$\int_{-1}^{1} t^4dt = 2/5$ obtemos, enfim, que

$$0 = 2/3a_0 + 2a_2$$
$$1 = 2/3a_1$$
$$2 = 2/5a_0 + 2/3a_2$$

resolvendo êste sistema vemos que $a_0 = 45/4$, $a_1 = 3/2$, $_2 = -15/4$.

4.3 - A adjunta de uma transformação linear

Seja a transformação $T:R^2 \to R^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere o vetor $v = (1,-2) \in R^2$ e forme a expressão $(T(u),v)$, $\forall u \in R^2$. Se $u = (x,y)$, então $(T(u),v) = (\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},(1,-2)) = ((2x + 4y,\ 3x + y),\ (1,-2))$ $2x + 4y - 6x - 2y = -4x + 2y$. Observe que $(T(u_1+u_2),v) = (T(u_1),v) + (T(u_2),v)$ e $(T(ku),v) = k(Tu,v)$.

Denotemos a expressão $(T(u),v)$ por $\psi_v(u)$, para indicar que depende do vetor v (òbviamente dependerá também da transformação linear escolhida). Provamos, acima; que $\psi_v(u_1+u_2) = \psi_v(u_1) + \psi_v(u_2)$ e $\psi_v(ku) = k\psi_v(u)$, ou seja, ψ_v <u>é um funcional linear</u>.

Mas se ψ_v é um funcional linear, existirá um vetor $v^* \in R^2$ tal que $\psi_v(u) = (u,v^*)$. Como $\psi_v(u) = -4x + 2y$, segue-se imediatamente que $v^* = (-4,2)$. Assim $\psi_v(u) = (T(u),v) = (u,v^*) = ((x,y),(-4,2))$. Recapitulomos o quo foi feito: dada uma transformação linear $T:R^2 \to R^2$ e fixado $v \in R^2$, associamos a êle um funcional linear ψ_v definido por $\psi_v(u) = (T(u),v)$. Mas então êste funcional linear é representado por um certo vetor $v^* \in R^2$. Assim, partindo de um vetor $v \in R^2$ chegamos a um

etor $v^* \in R^2$; note que dado $v \in R^2$, o v^* que satis-
az as condições acima é único (por quê?). Temos assim,
ma função de domínio R^2 e contradomínio R^2. Esta fun
ão será chamada de adjunta de T e denotada por T^*.
m verdade, T^* é uma transformação linear: provemos que,
$v_1, v_2 \in R^2$, $T^*(v_1+v_2) = T^*(v_1) + T^*(v_2)$. Pela definição
e $T^*(v_1+v_2)$, para todo $u \in R^2$, $(Tu, v_1+v_2) =$
$(u, T^*(v_1+v_2)) = (Tu, v_1) + T(u, v_2) = (u, T^*v_1) + (u, T^*v_2) =$
$(u, T^*v_1 + T^*v_2)$; assim, para todo $u \in R^2$, $(u, T^*(v_1+v_2)) =$
$(u, T^*v_1 + T^*v_2)$, ou seja, $(u, T^*(v_1+v_2) - T^*v_1 - T^*v_2) =$
0 e em particular fazendo $u = T^*(v_1+v_2) - T^*v_1 - T^*v_2$
em que $T^*(v_1+v_2) = T^*(v_1) + T^*(v_2)$.

A demonstração de que $T^*(kv) = kT^*(v)$ é analóga, deixada como um exercício.

XERCÍCIOS

.3.1: No exemplo acima, mostre que $T^*(kv) = kT^*(v)$.

.3.2: Na demonstração acima foi empregada uma técnica já usada antes: dado $v \in V$, se $(u,v) = 0$ para todo $\in V$, então $v = 0$. Demonstre isso.

3.3: Se você entendeu êste exemplo e acredita que T^* é uma transformação linear do plano, então deve
r possível achar sua matriz em relação à base canônica
,0), (0,1). Ache-a. (Sugestão: é suficiente calcular

$T^*(1,0)$ e $T^*(0,1)$). Você é capaz de perceber alguma relação entre a matriz de T^* e a de T ?

O que acabamos de fazer é <u>inteiramente geral</u>. Dada uma transformação linear $T:V \to W$, onde V e W são espaços vetoriais com produto interno, fixe $w \in W$ e considere a expressão $(Tv,w), \forall v \in V$ (observe que esta expressão faz sentido, pois $Tv \in W$). Chamemos de $\psi_w(v)$ a expressão (Tv,w), i.e., $\psi_w(v) = (Tv,w)$.

LEMA 4.3.4 - A função $\psi_w:V \to K$ definida por $\psi_w(v) = (Tv,w)$ é um funcional linear.

<u>Demonstração</u>: $\psi_w(v_1+v_2) = (T(v_1+v_2),w) = (Tv_1+Tv_2,w) = (Tv_1,w) + (Tv_2,w) = \psi_w(v_1) + \psi_w(v_2)$ e $\psi_w(kv) = (T(kv),w) = (kT(v),w) = k(Tv,w) = k\psi_w(v)$.

Se ψ_w é um funcional linear de V, existe um único vetor $w^* \in V$ tal que $\psi_w(v) = (v,w^*)$, $\forall v \in V$.

LEMA 4.3.5 - A correspondência $W \to V$ definida por $w \to w^*$ é uma transformação linear.

<u>Demonstração</u>: Por definição, $\forall v \in V$, $(v,(w_1+w_2)^*) = (Tv,w_1+w_2) = (Tv,w_1) + (Tv,w_2) = (v,w_1^*) + (v,w_2^*) = (v,w_1^* + w_2^*)$ logo $(w_1+w_2)^* = w_1^* + w_2^*$. Igualmente demonstra-se que $(kw)^* = kw^*$.

DEFINIÇÃO 4.3.6 - Dada uma transformação linear $T:V \to W$,

transformação linear $W \to V$ definida por $w \to w^*$ é
amada de <u>transformação adjunta</u> de T e denotada por T^*.
sim, T^* é definida pela equação $(Tv,w) = (v,T^*w)$,
$v \in V$, $w \in W$.

EMPLO

3.7: Seja $D:P_2 \to P_2$ o operador linear derivação e calculemos $D^*:P_2 \to P_2$. A transformação D^* fica per-
itamente determinada se conhecermos $D^*(1)$, $D^*(t)$, $D^*(t^2)$;
r outro lado, a equação definidora da transformação adjun
nos garante que $(Dp(t),q(t)) = (p(t),D^*q(t))$, para
is polinômios quaisquer em P_2. Assim

$$(D(1),1) = (1,D^*(1))$$
$$(D(1),t) = (1,D^*(t))$$
$$(D(1),t^2) = (1,D^*(t^2))$$

$$(D(t),1) = (t,D^*(1))$$
$$(D(t),t) = (t,D^*(t))$$
$$(D(t),t^2) = (t,D^*(t^2))$$

$$D^*(1) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$
$$D^*(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$$
$$D^*(t^2) = c_0 + c_1t + c_2t^2$$

temos

$$0 = (0,1) = a_0(1,1) + a_1(1,t) + a_2(1,t^2)$$
$$0 = (0,t) = b_0(1,1) + b_1(1,t) + b_2(1,t^2)$$
$$0 = (0,t^2) = c_0(1,1) + c_1(1,t) + c_2(1,t^2)$$

$$(1,1) = a_0(t,1) + a_1(t,t) + a_2(t,t^2)$$
$$(1,t) = b_0(t,1) + b_1(t,t) + b_2(t,t^2)$$
$$(1,t^2) = c_0(t,1) + c_1(t,t) + c_2(t,t^2)$$

$$2(t,1) = a_0(t^2,1) + a_1(t^2,t) + a_2(t^2,t^2)$$
$$2(t,t) = b_0(t^2,1) + b_1(t^2,t) + b_2(t^2,t^2)$$
$$2(t,t^2) = c_0(t^2,1) + c_1(t^2,t) + c_2(t^2,t^2)$$

Tomemos o produto interno em P_2 dado por $(p(t),q(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ e temos

$$(1,1) = 2 \quad (1,t) = 0 \quad (1,t^2) = 2/3, \; (t,t) = 2/3,$$
$$(t,t^2) = 0 \quad (t^2,t^2) = -2/5$$

e assim vem que

$$0 = 2a_0 + 2/3\ a_2$$
$$0 = 2b_0 + 2/3\ b_2$$
$$0 = 2c_0 + 2/3\ c_2$$

$$2 = 2/3\ a_1$$
$$0 = 2/3\ b_1$$
$$2/3 = 2/3\ c_1$$

$$0 = 2/3\ a_0 + 2/5\ a_2$$
$$4/3 = 2/3\ b_0 + 2/5\ b_2$$
$$0 = 2/3\ c_0 + 2/5\ c_2$$

ogo

$$0 = 2a_0 + 2/3\ a_2 \qquad a_0 = 0$$
$$2 = 2/3\ a_1 \qquad a_1 = 3$$
$$0 = 2/3\ a_0 + 2/5\ a_2 \qquad a_2 = 0$$

$$0 = 2\ b_0 + 2/3\ b_2 \qquad b_0 = -5/2$$
$$0 = 2/3\ b_1 \qquad b_1 = 0$$
$$4/3 = 2/3\ b_0 + 2/5\ b_2 \qquad b_2 = 15/2$$

$$0 = 2\ c_0 + 2/3\ c_2 \qquad c_0 = 0$$
$$2/3 = 2/3\ c_1 \qquad c_1 = 1$$
$$0 = 2/3\ c_0 + 2/5\ c_2 \qquad c_2 = 0$$

ı seja, relativa à base $1,t,t^2$ a matriz de D^* é

$$\begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & 0 \end{bmatrix}$$

teorema a seguir mostra que nem sempre é tão laborioso lcular a matriz de T^*, conhecendo-se T.

OREMA 4.3.8 - Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita ambos com produtos internos

e $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\beta' = \{e'_1, \ldots, e'_s\}$ bases ortonormais de V e W respectivamente. Então a matriz $T^*]_{\beta}^{\beta'}$ é a transposta conjugada da matriz $T]_{\beta'}^{\beta}$.

<u>Demonstração</u>: Se $a_{ij} \in T]_{\beta'}^{\beta}$ então por definição, $a_{ij} =$

$$= (Te_j, e'_i) = (e_j, T^*e'_i) = \overline{(T^*e'_i, e_j)} = \bar{a}^*_{ji} \quad \text{e}$$

assim o teorema fica demonstrado.

EXERCÍCIOS

4.3.9: Seja $T: R^3 \to R^3$ dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$, ache, de duas maneiras distintas, $T^*]_{\beta'}^{\beta'}$. (Sugestão: ache $T^*]_{\beta'}^{\beta'}$ diretamente como no Exemplo 4.3.7 e em seguida ache $T^*]_{\beta}^{\beta}$ e mude então para a base β').

4.3.10: Mostre que se T e S são transformações lineares $T: V \to W$, $S: W \to U$, então $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

4.3.11: Demonstre que $I^* = I$.

4.3.12: Mostre, usando 4.3.10, que se T é inversível T^* também o será e que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

4.3.13: Mostre que $(T^*)^* = T$ e que $(T+S)^* = T^*+S^*$.

4.3.14: Demonstre que $(kA)^* = \bar{k}A^*$.

CAPÍTULO 5

TIPOS ESPECIAIS DE TRANSFORMAÇÕES

.1 - Auto-valores e auto-vetores de uma transformação linear

Neste capítulo, como no anterior, todos os espaços etoriais considerados são reais ou complexos e sempre dodos de um produto interno.

EFINIÇÃO 5.1.1 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K e $T:V \to V$ uma transformação near. Dado $\lambda \in K$, dizemos que λ é um auto-valor (ou lor próprio) de T se $\exists$ $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $v) = \lambda v$.

EFINIÇÃO 5.1.2 - Se V é um espaço vetorial sôbre um corpo K e $T:V \to V$ é uma transformao linear, dizemos que $v \in V$, $v \neq 0$ é um auto-vetor (ou tor próprio) de T se $\exists\ \lambda \in K$ tal que $Tv = \lambda v$. zemos que λ é auto-valor associado ao auto-vetor v.

Note que o número $0 \in K$ é um auto-valor de T, sociado a $v \in V$, $v \neq 0$, se e sòmente se $v \in N(T)$. Des

ta maneira, uma transformação linear $T:V \to V$ admite o escalar 0 como auto-valor se e sòmente se não é inversível. Observe também que $Tv = \lambda v$ se e sòmente se $(T-\lambda I)v = 0$ e desta maneira λ é auto-valor de T se e sòmente se a transformação linear $(T-\lambda I)$ não é inversível.

EXEMPLO

5.1.3: Seja $T:R^2 \to R^2$ dada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Se $(t-\lambda I)v = 0$, entre $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mas a transformação definida por $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ é não inversível se e sòmente se $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ (por quê? veja 3.3.9) ou seja $(1-\lambda)^2 - 9 = 0$ e assim $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Se $\lambda_1 = 4$, uma solução de $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é $(1,1)$ que será um auto-valor de T associado ao auto-vetor 4. Para $\lambda_2 = -2$ obtemos, por exemplo, o vetor $(1,-1)$.

Note que se v é auto-vetor de T associado ao auto-valor λ e $k \in K$, então kv será também auto-vetor de T associado a λ, pois $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. Podemos mesmo demonstrar o que se segue:

TEOREMA 5.1.4 - Dada uma transformação linear $T:V \to V$, o conjunto $V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V.

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar, V_λ é não vazio, pois

$\in V_\lambda$; se $v_1, v_2 \in V_\lambda$, então $T(v_1+v_2) = \lambda v_1+\lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2)$ e $T(k\lambda) = \lambda(kv)$.

Outro fato importante é demonstrado abaixo.

ΞOREMA 5.1.5 - Se $T:V \to V$ é uma transformação linear e v_1, v_2 são auto-vetores associados aos au›-valores distintos λ_1 e λ_2, então v_1 e v_2 são li›armente independentes.

›monstração: Suponhamos que $x_1v_1 + x_2v_2 = 0$; então $T(x_1v_2 + x_2v_2) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) = x_1\lambda_1v_1 + x_2\lambda_2v_2 = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o sistema de equações veto›ais

$$x_1v_1 + x_2v_2 = 0$$
$$x_1\lambda_1v_1 + x_2\lambda_2v_2 = 0$$

ımite só a solução $x_1 = x_2 = 0$ (por quê? prove isso).

ΚERCÍCIOS

.1.6: Seja $T:R^2 \to R^2$ definida pela matriz $\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$.

Mostre que esta transformação possui dois auto-va›res distintos e ache, para cada um dêles, um auto-vetor ›o nulo. Dê uma base de R^2 em relação à qual a matriz › T é diagonal.

1.7: Ache uma transformação linear $T:R^2 \to R^2$ que não possui auto-valores.

5.1.8: Seja $T: R^3 \to R^3$ definida por $\begin{vmatrix} 14 & -2 & -2 \\ 18 & -1 & -3 \\ 48 & -8 & -6 \end{vmatrix}$.

Determine os auto-valores e os auto-vetores de T e uma base de R^3 em relação à qual a matriz de T é diagonal.

5.1.9: Se $T: V \to V$ é uma transformação linear, V tem dimensão n e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são auto-valores distintos de T, com auto-vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$; então êstes formam uma base β para V. Ache $T]_\beta^\beta$.

5.1.10: Seja $T: V \to V$ uma transformação linear. Um subespaço U de V é dito <u>invariante sob</u> T se $T(U) \subseteq U$. Mostre que se T admite um auto-valor λ, então V_λ é invariante sob T.

5.1.11: Ache uma transformação linear do plano que não admite nenhum subespaço invariante (exceto, naturalmente, os subespaços triviais 0 e R^2).

5.1.12: Mostre que se $T: V \to V$ é uma transformação linear e U_1, U_2 são subespaços vetoriais de V invariantes sob T e tais que $V = U_1 \oplus U_2$, então existem $T_1: U_1 \to U_1$, $T_2: U_2 \to U_2$ tais que $T(u_1 \oplus u_2) = T_1(u_1) + T_2(u_2)$, $\forall\, u = u_1 \oplus u_2 \in V$.

5.1.13: Dáda uma transformação linear $T: V \to V$ cuja matriz em relação a uma base β de V é diagonal,

re que β é formada por auto-vetoree de V. Se β'
tra base de V, segue-se forçosamente que $T]_{\beta'}^{\beta'}$ é
onal?

14: Se $T:V \to V$ é uma transformação linear, é sempre possível achar uma base β de V em relação à a matriz de T é diagonal? Prove isso ou dê um con-exemplo.

Tôda matriz A n×n com coeficientes em um corpo rico K define uma transformação linear $T_A: C^n \to C^n$. z é uma matriz n×1 representando um elemento de então $T_A(z) = A.z.$

NIÇÃO 5.1.15 - Dada uma matriz A n×n, <u>um auto-valor de</u> A é um auto-valor da traneformação $^n \to C^n$ induzida por A. Um <u>auto-vetor de A</u> é um -vetor de T_A (logo, uma n-lieta de números comple-.

RCÍCIO

.16: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{een}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ache eeus valoree próprioe e vetores próprioe.

Já vimos que nem eempre uma transformação linear $\to$ V admite auto-valores e auto-vetores. Por outro , uma matriz n×n com coeficientes em um oorpo K sui sempre auto-valores, que serão números complexos,

não necessàriamente em K, como mostrado abaixo:

TEOREMA 5.1.17 - Se A é uma matriz $n \times n$, então A possui um auto-valor e um auto-vetor.

Demonstração: Consideremos a transformação $T_A : C^n \to C^n$ definida por A. Se β é a base canônica de C^n, então $T_A]_\beta^\beta = A$. Por outro lado, $T_A(z) = \lambda z$ com $z \neq 0$ se e sòmente se $(T_A - \lambda I)$ não é inversível e já sabemos (3.3.9) que $(T_A - \lambda I)$ é não-inversível se e sòmente se $\Delta = \det((T_A - \lambda I)]_\beta^\beta) = 0$; mas Δ é um polinômio de grau n^2 em λ o qual possui, pelo teorema fundamental da álgebra, uma raiz complexa e provamos assim que A tem um auto-valor (complexo!), ao qual está associado um auto-vetor $z \in C^n$, $z \neq 0$.

COROLÁRIO 5.1.18 - Se $T: V \to V$ é uma transformação linear e V um espaço vetorial complexo, então T possui um auto-valor e um auto-vetor.

2 - Transformações auto-adjuntas

Dada uma transformação linear $T:V \to V$ a sua ad-
nta T^* será também uma transformação linear de V em
já sabemos que se β é uma base ortonormal de V, en-
o a matriz de T^* na base β é a transposta conjugada
matriz de T.

FINIÇÃO 5.2.1 - Uma transformação linear $T:V \to V$ é
auto-adjunta se $T = T^*$.

Se V é um espaço vetorial sôbre os reais, uma
ansformação auto-adjunta é tradicionalmente chamada de
nétrica; se V é um espaço complexo, as transformações
to-adjuntas de V em V são também conhecidas por
nétricas conjugadas ou hermitianas.

Pela definição de adjunta de uma transformação,
é auto-adjunta se e sòmente se, $\forall u,v \in V$, $(Tu,v) =$
(u,Tv).

Uma matriz A $n \times n$ com coeficientes em um corpo
(real ou complexo) é auto-adjunta se a transformação
$:K^n \to K^n$ for auto-adjunta.

Um fato de verificação imediata é de que uma trans
rmação $T:V \to V$ é auto-adjunta se e sòmente se sua ma-

triz em relação a uma base ortonormal é simétrica conjugada (veja 4.3.8).

Tôda transformação linear $T:V \to V$ onde V é um espaço vetorial complexo possui um auto-valor complexo. Se T é hermitiana, então êste auto-valor é real, como provado no teorema abaixo:

TEOREMA 5.2.2 - Se $T:V \to V$ é uma transformação auto-adjunta sôbre um espaço vetorial complexo e λ é um auto-valor de T, então $\lambda \in R$.

<u>Demonstração</u>: Se λ é um auto-valor de T, $\exists\ v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Por outro lado, $\lambda(v,v) = (\lambda v,v) = (Tv,v) = (v,Tv) = (v,\lambda v) = \bar{\lambda}(v,v)$ e como $v \neq 0$, $(v,v) \neq 0$ logo $\lambda(v,v) = \bar{\lambda}(v,v)$ acarreta que $\lambda = \bar{\lambda}$ ou seja, λ é real.

Êste teorema mostra que todos os auto-valores de uma transformação $T:V \to V$ sôbre um espaço vetorial complexo são reais. O resultado seguinte é mais forte:

TEOREMA 5.2.3 - Seja $T:V \to V$ uma transformação auto-adjunta sôbre um espaço vetorial real. Então T possui um auto-valor real.

<u>Demonstração</u>: Tomemos a matriz de T em relação a uma base ortonromal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V e ponhamos $A = T]_{\beta}^{\beta}$. A matriz A, de coeficientes reais,

ine uma transformação linear $T_A:C^n \to C^n$. Como A é
étrica (por quê?), T_A será uma transformação auto-ad-
ta de C^n, e pelo Teorema 5.2.2 T_A possuirá um auto-
lor real λ. Existe então $z \in C^n$ tal que $T_A(z) = \lambda z$.
escrevermos $z = x + iy$, onde $x,y \in R^n$, então
$x+iy) = T_A(x) + iT_A(y) = \lambda(x+iy) = \lambda x + i\lambda y$. Como
$x), T_A(y), \lambda x$ e λy são vetores do R^n (matrizes
), então segue-se que $T_A(x) = \lambda x$ e $T_A(y) = \lambda y$. Como
0, temos que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Supondo que $x \neq 0$,
$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, vem que $v = \Sigma x_i v_i$ é um auto-valor
T com auto-valor λ e a demonstração fica concluida.

REMA 5.2.4 - Se $T:V \to V$ é uma transformação linear auto-adjunta e λ_1,λ_2 são auto-valores
cintos de T, aos quais estão associados os auto-veto-
v_1 e v_2, então v_1 e v_2 são ortogonais.

onstração: Com efeito, usando que $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, $Tv_2 = \lambda_2 v_2$ obtemos que $\lambda_1(v_1,v_2) = (\lambda_1 v_1,v_2) =$
$v_1,v_2) = (v_1,Tv_2) = (v_1,\lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1,v_2)$, pois
$_2 \in R$. Segue-se então que $(\lambda_1-\lambda_2)(v_1,v_2) = 0$ e como
$\neq \lambda_2$, temos $(v_1,v_2) = 0$, o que conclui a demonstração.

NIÇÃO 5.2.5 - Se $T:V \to V$ é uma transformação linear e $U \subseteq V$ é um subespaço invariante de
U é dito ser invariante sob T se $T(U) \subseteq U$.

EXEMPLOS

5.2.6: Seja $T: V \to V$ uma transformação linear auto-adjunta tal que $T \circ T = T$ e considere $U_1 = \{v \in V | T(v) = v\}$. É óbvio que U_1 não é vazio e podemos mostrar que U_1 é um subespaço vetorial de V: se $v, v' \in U_1$, $k, k' \in K$, $T(kv + k'v') = kT(v) + k'T(v') = kv + k'v'$. Por outro lado, seja $U_2 = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$. É fácil também verificar que U_2 é um subespaço de V. Por outro lado, $U_1 \cap U_2 = 0$, pois se $v \in U_1 \cap U_2$, então $v \in U_1$, logo $T(v) = v$ e como $v \in U_2$, $T(v) = 0$, logo $v = 0$. Além disso, se $v \in V$, vem que $v = v - T(v) + T(v)$ com $v - T(v) \in U_2$, pois $T(v - T(v)) = T(v) - T \circ T(v) = T(v) - T(v) = 0$ e $T(v) \in U_1$, visto que $T \circ T(v) = T(v)$. Assim, por 3.5.11, $V = U_1 \oplus U_2$.

Em verdade, $U_2 = U_1^{\perp}$: se $v \in U_2$, $u \in U_1$, $u = Tu$ e $(u,v) = (Tu,v) = (u,Tv) = (u,0) = 0$ e se $v \in U_1^{\perp}$, $u \in V$, então $(v,u) = (v, u - T(u) + T(u)) = (v, u - T(u)) + (v, T(u)) = (v, u - T(u))$, pois $T(u) \in U_1$, mas $(v, u - T(u)) = (v,u) - (v, T(u)) = (v,u) - (T(v),u)$ logo $(T(v),u) = 0$, $u \in V$ e assim $T(v) = 0$, logo $v \in U_2$.

Observe que U_1 e U_2 são invariantes sob T (prove isso!). Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots, v_t'\}$ são bases ortonormais de U_1 e U_2 respectivamente, então $\beta'' = \{v_1, v_2, \ldots, v_s, v_1', v_2', \ldots, v_t'\}$ é uma base ortonormal para V e $T]_{\beta''}^{\beta''} = (a_{ij})$ é particularmente simples:

$= 0$, $i \neq j$, $a_{ii} = 1$ se $i \leq s$ e $a_{ii} = 0$, $i > s$. Di-
os que T é a projeção ortogonal sôbre U_1 ao longo
U_2.

.7: Se $T: V \to V$ é uma transformação linear e $V_1 \subseteq V$
é um subespaço de V invariante sob T, então
$_1) \subseteq V_1$ e podemos considerar T como uma transforma-
de V_1 em V_1, que denotaremos por T_1. Assim,
$V_1 \to V_1$ e se $v \in V_1$, $T_1(v) = T(v) \in V_1$, pela pró-
a definição de T_1. Se V_2 é outro subespaço de V
bém invariante sob T e tal que $V = V_1 \oplus V_2$, podemos
ão escrever $T = T_1 \oplus T_2 : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$. Dizemos que V_1
V_2 reduzem T.

REMA 5.2.8 - Seja $T: V \to V$ uma transformação linear auto-adjunta e λ um de seus auto-valo-
. Então o subespaço $(V_\lambda)^\perp$ é invariante sob T.

onstração: Se $v \in (V_\lambda)^\perp$, $(v,u) = 0$, $\forall u \in V_\lambda$ e
assim $0 = \lambda(v,u) = (v,\lambda u) = (v,Tu) =$
$Tv,u)$, logo $Tv \in (V_\lambda)^\perp$ como queríamos demonstrar.

REMA 5.2.9 - Se $T: V \to V$ é uma transformação linear auto-adjunta sôbre um espaço vetorial V
dimensão n, então existe uma base ortonormal de V
mada por auto-vetores de T e em relação à qual a ma-
z de T é diagonal. Os elementos da diagonal principal

da matriz serão exatamente os auto-valores de T.

Demonstração: A demonstração se faz por indução. Se $\dim V = 1$, o teorema é trivial (por quê?). Suponhamo-lo demonstrado para o caso em que a dimensão de V é estritamente menor que n e provemos que êle vale para o caso em que $\dim V = n$: seja $\lambda \in R$ um auto-valor de T e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma base ortonormal para V_λ. Observe que $\dim V_\lambda \geq 1$, logo $\dim V_\lambda^\perp \leq n-1$. Já sabemos que o subespaço V_λ é invariante sob T. Como $\forall u,v \in V$, $(Tu,v) = (u,Tv)$, segue-se que T restrita a $V_\lambda^\perp$, T_1, é uma transformação auto-adjunta. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal $u_1, u_2, \ldots, u_t$ de $V_\lambda^\perp$ em relação à qual a matriz de T_1 é diagonal. Então, $\{v_1, v_2, \ldots, v_s, u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ é uma base ortonormal para V (por quê?) em relação à qual a matriz de T goza da propriedade pedida.

DEFINIÇÃO 5.2.10 - Uma transformação $T: V \to V$, V um espaço vetorial sôbre um corpo K é diagonalizável se existe uma base β de V tal que $T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal com coeficientes em K.

O Teorema 5.2.9 mostra que se $T: V \to V$ é uma transformação auto-adjunta de um espaço vetorial real ou complexo então T é diagonalizável.

MPLO

.11: Se $T:V \to V$ é uma transformação linear e se $\forall u,v \in V$ $(T(u),v) = 0$, então $T = 0$ (faça $T(u)$). Por outro lado, se V é um espaço vetorial plexo e $(T(v),v) = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. efeito, se $c_1, c_2 \in C$ e $u,v \in V$, então

$c_1u + c_2v), c_1u + c_2v) = (c_1T(u) + c_2T(v), c_1u+c_2v) =$
$c_1|^2 (T(u),u) + |c_2|^2 (T(v),v) + c_1\bar{c}_2(T(u),v) +$
${}_1c_2(T(v),u)$ logo, pela hipótese,

$$0 = c_1\bar{c}_2(T(u),v) + \bar{c}_1c_2(T(v),u)$$

azendo $c_1 = c_2 = 1$ vem que

$$0 = (T(u),v) + (Tv,u) \quad ;$$

$c_1 = i$, $c_2 = 1$, temos

$$0 = i(Tu,v) - i(Tv,u)$$

lestas duas equações, segue-se que $(Tu,v) = 0$, $\forall u,v \in V$ ssim $T = 0$.

Observe que se V é um espaço real, êste resulta- òbviamente falso (tome uma rotação de 90°!). Para ços reais vale o seguinte: se $T:V \to V$ é auto-adjunta $Tv,v) = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. Com efeito, $+v),u+v) = (Tu,v) + (Tv,u) + (Tu,u) + (Tv,v)$, logo, pe ipótese, $(Tu,v) + (Tv,u) = 0$ e como T é auto-ad- a $2(Tu,v) = 0$ e assim $T = 0$.

EXERCÍCIO

5.2.12: Se T_1 e T_2 são transformações auto-adjuntas de um espaço vetorial V é verdade que $T_1T_2 = T_2T_1$? Prove isso ou apresente um contra-exemplo.

A situação discutida neste exercício fica perfeitamente esclarecida pelo exemplo abaixo:

EXEMPLO

5.2.13: Sejam T_1 e T_2 transformações auto-adjuntas de um espaço vetorial V. Então, existe uma base ortonormal β de V tal que $T_1]_\beta^\beta$ e $T_2]_\beta^\beta$ são matrizes diagonais se e sòmente se $T_1T_2 = T_2T_1$.

Com efeito, seja $\lambda_1 \in R$ um auto-valor de T_1. Então, o subespaço V_{λ_1} é invariante sob T_2: se $v \in V_{\lambda_1}$, então $T_1(T_2(v)) = T_2(T_1v) = T_2(\lambda_1 v) = \lambda_1(T_2v)$ logo $T_2v \in V_{\lambda_1}$. Então, existe $v_1 \in V_{\lambda_1}$ que é auto-vetor de T_2 e como todos os elementos de V_{λ_1} são auto-vetores de T_1 concluimos que T_1 e T_2 possuem um auto-vetor comum, v_1. Considere agora o subespaço $V_1 = [v_1]^\perp$ que é invariante sob T_1 e T_2 (por quê?). Podemos, então, como na demonstração de 5.2.9 aplicar indução sôbre a dimensão do espaço para concluir que existe uma base ortonormal de V formada por vetores que são auto-vetores de T_1 e T_2 simultâneamente. A afirmação recíproca é trivialmente verificada.

3 - Transformações unitárias

Neste parágrafo estudamos uma generalização das ro
ções do plano.

FINIÇÃO 5.3.1 - Seja V um espaço real ou complexo, uma transformação linear $T:V \to V$ é unitá-
a se $TT^* = T^*T = I$.

Ou seja, uma transformação é unitária se sua adjun
é sua inversa, $T^* = T^{-1}$.

Uma matriz A com coeficientes em um corpo K
eais ou complexos) é unitária se a transformação
$K^n \to K^n$ for unitária.

ERCÍCIOS

3.2: Mostre que uma rotação do plano é uma transformação unitária.

3.3: Se $U_1, U_2: V \to V$ são transformações unitárias mostre que $U_1 \cdot U_2$ é uma transformação unitária.

3.4: Demonstre que a inversa de uma transformação unitária é unitária.

Se V é um espaço vetorial real, as transformações
tárias de V são tradicionalmente conhecidas como or-
onais.

O lema abaixo apresenta várias caracterizações para as transformações unitárias:

ʌA 5.3.5 - Se $T:V \to V$ é uma transformação linear, então as condições abaixo são equivalentes:

1) T é unitária
2) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais
3) T preserva o produto interno, i.e., $\forall u,v \in V$, $(Tu,Tv) = (u,v)$
4) T preserva a norma i.e., $\forall\ v \in V$, $\|Tv\| = \|v\|$

emonstração: Provemos que 1) $\to$ 2): Se $\beta=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ é uma base ortonormal, seja

$' = \{Te_1,Te_2,\dots,Te_n\}$; como T é inversível, β' é uma ase de V; de $\|Te_i\|^2 = (Te_i,Te_i) = (e_i,T^*Te_i) = (e_i,e_i) = \|e_i\|^2 = 1$ e $(Te_i,Te_j) = (e_i,T^*Te_j) = (e_i,e_j)$, vemos ue β' é ortonormal. Para ver que 2) $\to$ 3), sejam $\iota,v \in V$, $\beta = \{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ uma base ortonormal e $\iota = \Sigma x_i e_i$, $v = \Sigma y_j e_j$, donde $Tu = \Sigma x_i\ Te_i$, $Tv = \Sigma y_j\ Te_j$ assim $(Tu,Tv) = (\Sigma x_i\ Te_i,\ \Sigma y_j\ Te_j) = \sum_{i,j} x_i\overline{y}_j(Te_i,Te_j) = \sum_i x_i\overline{y}_i$, visto que os vetores Te_i são ortonormais. Mas $(u,v) = (\Sigma x_i e_i,\ \Sigma y_j e_j) = \Sigma x_i\overline{y}_i$, logo T preserva o produto interno. Por outro lado, $\|Tv\|^2 = (Tv,Tv) = (v,v) = \|v\|^2$ o que mostra 3) $\to$ 4). Se $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in V$,

ão $(Tv,Tv) = (v,v), \forall v \in V$, ou seja, $(T^*Tv,v) = (v,v)$ $v \in V$ ou ainda $((T^*T-I)v,v) = 0$; mas como $(T^*T-I)^* =$ $T^*(T^*)^* - I^* = T^*T-I$ vemos que (T^*T-I) é auto-adjun- e podemos aplicar os resultados do Exemplo 5.2.11 para ncluir que $T^*T = I$; como T é linear, $T^* = T^{-1}$, o conclui a demonstração.

ERCÍCIO

3.6: Se $T:V \to V$ é uma transformação unitária, β é uma base ortonormal de V, $X_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ é a i-ésima coluna de $[T]_\beta^\beta$, mostre que $(X_i)^t X_i = 1$ e $(X_i)^t X_j = 0$, $i \neq j$.

EMPLO

3.7: Seja V um espaço vetorial real ou complexo e $T:V \to V$ uma <u>função</u> (a priori não linear!) brejetora e tal que $(Tu,Tv) = (u,v), \forall u,v \in V$. Então, é linear, logo unitária. Em primeiro lugar, T é inversível: se $u \neq v$, $\|Tu-Tv\| = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - (Tu,Tv) -$ $(Tv,Tv) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - (u,v) - (v,u) = \|u-v\|^2 \neq 0$. sim, T é uma função bijetora, logo inversível. Além sso, de $(Tu,Tv) = (u,v)$, como $u = T^{-1}u'$, $v = T^{-1}v'$ ra $u',v' \in V$, segue-se que, $\forall u',v' \in V$, $(u',v') =$ $(T^{-1}u',T^{-1}v')$ e vem que $(Tu,v) = (T^{-1}Tu,T^{-1}v) =$ $(u,T^{-1}v)$. Para provar que T é linear, se $v,u_1,u_2 \in V$

$_1, k_2 \in K$, $(Tu_1, v) = (u_1, T^{-1}v)$, $(Tu_2, v) = (u_2, T^{-1}v)$ logo $(k_1Tu_1, v) + (k_2Tu_2, v) = (k_1Tu_1 + k_2Tu_2, v) = (k_1u_1 + k_2u_2, {}^{-1}v) = (T(k_1u_1 + k_2u_2), v)$ e assim, $\forall v \in V$, $(k_1Tu_1 + k_2Tu_2, v) = (T(k_1u_1 + k_2u_2), v)$ donde $T(k_1u_1 + k_2u_2) = k_1T(u_1) + k_2T(u_2)$ e fica assim demonstrado que T é uma transformação linear unitária.

Para espaços vetoriais reais podemos dizer algo mais:

EXEMPLO

5.3.8: Se V é um espaço vetorial real e $T: V \to V$ é uma função (a priori não linear!) tal que $T(0) = 0$ e $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$, $\forall u, v \in V$, então T é uma transformação linear ortogonal. Com efeito, como $TO = 0$, então $\|Tu\| = \|u\|$ e $\|Tu - Tv\|^2 = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - (Tu, Tv) - (Tv, Tu) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(Tu, Tv)$. Mas como $\|Tu - Tv\|^2 = \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u, v)$, segue-se que $(Tu, Tv) = (u, v)$ $\forall u, v \in V$. Se $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V, vemos assim que $\beta' = \{Te_1, Te_2, \ldots, Te_n\}$ é também uma base ortonormal para V e assim $Tv = (Tv, Te_i)Te_i = (v, e_i)Te_i$. Se definirmos a transformação linear $U: V \to V$ por $U(e_i) = T(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, U será ortogonal (por quê?) e $Tv = \Sigma(v, e_i)Te_i = \Sigma(v, e_i)Ue_i = U(\Sigma(v, e_i)e_i) = Uv$ $\forall v \in V$, logo $Uv = Tv$ e assim T é uma transformação linear ortogonal.

(ERCÍCIO

.3.9: Seja V um espaço vetorial real e $T:V \to V$ uma função tal que, $\forall u,v \in V$, $\|Tu-Tv\| = \|u-v\|$. Então, é uma transformação linear ortogonal seguida de uma ranslação de V (Sugestão: Considere $S:V \to V$ definida or $S(v) = T(v) - T(0)$ e aplique 5.3.8).

Já sabemos que uma transformação linear auto-adjun a $T:V \to V$ em um espaço vetorial real possui auto-valo- es e existe uma base ortonormal de V formada por auto- etores de T. É fácil ver que uma transformação linear rtogonal não possui necessàriamente auto-valores (consi- ere uma rotação do plano). Passamos agora a estudar as ropriedades dos auto-valores e dos auto-vetores de uma ransformação unitária.

EOREMA 5.3.10 - Seja V um espaço vetorial complexo. Se $T:V \to V$ é uma transformação linear uni- ária e $\lambda \in C$ é um auto-valor de T, então $|\lambda| = 1$.

emonstração: Tome $v \neq 0$ um auto-vetor associado a λ e então $(Tv,Tv) = (\lambda v,\lambda v) = \lambda\bar{\lambda}(v,v)$; mas $Tv,Tv) = (v,v)$, logo $\lambda\bar{\lambda}(v,v) = (v,v)$ e como $(v,v) \neq 0$ em que $\lambda\bar{\lambda} = 1$ ou seja, $|\lambda| = 1$.

EOREMA 5.3.11 - Se $T:V \to V$ é uma transformação linear unitária e $\lambda \in C$ é um auto-valor de T,

<u>Demonstração</u>: Seja $v \in V_\lambda^\perp$, então, se $u \in V_\lambda$, $(v,u) = 0$, logo $(Tv,Tu) = (v,u) = 0$; mas $(Tv,Tu) = (Tv,\lambda u) = \bar{\lambda}(Tv,u)$ e assim, como $\bar{\lambda} \neq 0$, $(Tv,u) = 0$, o que queríamos demonstrar.

Podemos agora demonstrar o teorema que nos interessa:

TEOREMA 5.3.12 - Se $T: V \to V$ é uma transformação linear unitária de um espaço vetorial <u>complexo</u>, então existe uma base ortonormal de V formada por auto-vetores de T.

<u>Demonstração</u>: Procederemos, mais uma vez, por indução sôbre a dimensão de V: seja $\lambda \in C$ um auto-valor de T e tomemos uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ para V_λ. Como $\dim V_\lambda^\perp < \dim V$ e $V_\lambda^\perp$ é invariante sob T, a hipótese de indução nos garante que existe uma base ortonormal $\beta' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_t\}$ de $V_\lambda^\perp$ formada por auto-vetores de T. Então $\{e_1, e_2, \dots, e_s, e'_1, e'_2, \dots, e'_t\}$ é uma base ortonormal de V com a propriedade pedida.

4 - Movimentos rígidos no plano e no espaço

Neste parágrafo, daremos uma descrição completa dos ovimentos rígidos no plano e no espaço, usando os resul- ados sôbre as transformações unitárias encontrados em 3.

EFINIÇÃO 5.4.1 - Dado um espaço vetorial V, um movimento rígido em V é uma função $f:V \to V$ ue preserva distâncias, i.e., $\forall u,v \in V$, $\|f(u)-f(v)\| = \|u-v\|$.

Como uma conseqüência imediata de 5.3.9 temos o esultado abaixo:

EMA 5.4.2.- Se V é um espaço vetorial real e $f:V \to V$ é um movimento rígido, então f é uma transformação linear ortogonal seguida de uma translação de $f(0)$.

Desta maneira, o estudo dos movimentos rígidos em n espaço vetorial real V se resume em estudar as transformações lineares ortogonais definidas em V.

KERCÍCIOS

.4.3: Se $V = R^2$ e T é definida por $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qual é o determinante da matriz de T? Sejam as

ransformações do plano definidas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ospectivamonte. Idontifique-as geomètricamente. Quais dellas são rotações? Quais seus determinantes?

5.4.4: Verifique, dentre as transformações apresentadas om 5.4.3 quais as que possuem auto-valores e ache os auto-votores corrospondentos.

Seja agora $T:R^2 \to R^2$ uma transformação ortogonal do plano. Então, se $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ vem que $Tv_1 = (a_1,a_2)$, $Tv_2 = (b_1,b_2)$ e $\sqrt{a_1^2+a_2^2} = 1$, $\sqrt{b_1^2+b_2^2} = 1$, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, pois T transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Mas então $|a_1|$, $|a_2|$, $|b_1|$, $|b_2|$ são números menores ou iguais a 1 e existe $\theta \in R$, $0 \leq \theta < 2\pi$ tal que $a_1 = \cos\theta$, $a_2 = \text{sen}\,\theta$ e vemos que $-\frac{b_2}{b_1} = \text{tg}\,\theta$ donde ou $b_1 = \text{sen}\,\theta$, $b_2 = -\cos\theta$ ou $b_1 = -\text{sen}\,\theta$, $b_2 = \cos\theta$. Assim, há duas possibilidades para T:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Mas

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

uma reflexão seguida de uma rotação.

ERCÍCIO

4.5: Mostre que as transformações de 5.4.3 se enquadram tôdas nos dois tipos obtidos acima.

Se $T:R^3 \to R^3$ é uma transformação ortogonal, en- o T possui pelo menos um auto-valor real λ, visto ue $\det(T-\lambda I)$ é um polinômio do 3º grau, que sempre tem a raiz real. Seja v_1 um auto-vetor de norma 1 associa a λ. Já sabemos que $[v_1]^{\perp}$ é invariante sob T (com- are com 5.3.11), logo T restrita a $[v_1]^{\perp}$ é uma trans- ormação ortogonal do plano, caso já estudado. Tomando na base ortonormal $\{v_2,v_3\}$ para $[v_1]^{\perp}$, vem que $\{v_1,v_2,v_3\}$ uma base ortonormal para o R^3 em relação à qual a ma- riz de T será

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad |\lambda| = 1,$$

m vista dos resultados para o plano. Observe que

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

omo $|\lambda| = 1$, $\lambda \in R$, ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$; é fácil então escrever tôdas as transformações ortogonais de R^3: rota ões no espaço em tôrno de uma reta, reflexão sôbre um pla

no, reflexão sôbre um plano seguida de rotação em tôrno da normal ao plano, reflexão em relação a um ponto.

5.5 - Transformações normais

Neste parágrafo, caracterizamos tôdas as transformações lineares de um espaço vetorial complexo V para as quais existe uma base ortonormal de V em relação à qual a matriz da transformação é diagonal.

DEFINIÇÃO 5.5.1 - Seja V um espaço complexo; uma transformação $T:V \to V$ é normal se e sòmente se $TT^* = T^*T$.

Como exemplo de transformações normais temoe as transformações auto-adjuntas e as transformações unitárias.

Uma matriz A nxn com coeficientes em C é normal se a transformação $T_A:C^n \to C^n$ for normal.

EXERCÍCIO

5.5.2: Dê um exemplo de uma transformação normal que não é auto-adjunta ou unitária.

LEMA 5.5.3 - Sejam T_1 e T_2 transformaçõee lineares de

em V que comutam, ou seja, $T_1T_2 = T_2T_1$, e λ_1 um o-valor de T_1. Então V_{λ_1} é invariante sob T_2.

onstração: Seja $v \in V_{\lambda_1}$; então, $T_1v = \lambda_1 v$. Por outro lado, $T_1(T_2v) = T_2(T_1v) = T_2(\lambda_1 v) = \lambda_1 T_2 v$, seja, $T_2v \in V_{\lambda_1}$, o que queríamos demonstrar.

OLÁRIO 5.5.4 - Dadas duas transformações lineares $T_1, T_2 : V \to V$ (V um espaço complexo) s que $T_1T_2 = T_2T_1$, as duas possuem um auto-votor co-, i.e., $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ tal que $T_1v = \lambda_1 v$ e $T_2v = {}_2v$.

onstração: Com efeito, pelo Lema 5.5.3, dado um auto--valor λ_1 de T_1, V_{λ_1} é invariante sob mas então $\exists\, v \in V_{\lambda_1}$ que é auto-vetor de T_2 (por ?) e a demonstração fica concluida (por quê?).

Podemos, agora, passar ao teorema mais importante te parágrafo:

REMA 5.5.5 - Dada uma transformação normal $T : V \to V$, V complexo, existe uma base ortonormal de V tal que $T]_\beta^\beta$ é diagonal; reciprocamente, se ste uma base ortonormal β de V em relação à qual é diagonal, então T é normal.

onstração: Seja $T : V \to V$ normal; como $TT^* = T^*T$, sa-

bemos que T e T^* admitem um auto-vetor comum v_1. O subespaço $V_1 = [v_1]^\perp$ de V é invariante sob T e T^*; com efeito, se $v \in V_1$, $(v,v_1) = 0$, mas $T(v,v_1) = (v,T^*v_1) = \bar{\lambda}(v,v_1) = 0$ visto que v_1 é auto-vetor de T^*. Por outro lado, $(T^*v,v_1) = (v,T^*v_1) = \bar{\lambda}'(v,v_1) = 0$. Assim, T restrito a V_1 é uma transformação normal e podemos agora, como já feito outras vêzes, aplicar indução sôbre a dimensão do espaço para concluir o teorema.

A afirmação recíproca é de demonstração trivial (faça-a!).

EXERCÍCIO

5.5.6: Na demonstração acima, prove que $\lambda' = \bar{\lambda}$.

CAPÍTULO 6

FORMAS BILINEARES

Mais uma vez, todos os espaços vetoriais considera
serão reais ou complexos.

- Formas bilineares - definição e generalidades

NIÇÃO 6.1.1 - Seja V um espaço vetorial sôbre um corpo K. Uma <u>forma bilinear</u> φ em V
ia função $\varphi: V \times V \to K$ tal que

$\forall\ u_1, u_2, v \in V,\ \varphi(u_1+u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$

$\forall\ u, v_1, v_2 \in V,\ \varphi(u, v_1+v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$

$\forall\ \lambda \in K,\ u, v \in V,\ \ \varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v), \varphi(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\varphi(u, v)$

Note que se K é o corpo real, então $\varphi(u, \lambda v) =$
$\varphi(u, v)$ pois um número complexo é real se e só se é
l ao seu conjugado.

IPLOS

2: Um produto interno em V é uma forma bilinear. Se $\varphi: V \times V \to K$ é uma forma bilinear tal que $\varphi(v, u) \geq 0$,

$\in V$ e $\varphi(v,u) = 0 \leftrightarrow v = 0$, dizemos que φ é <u>positi-</u> <u>definida</u>. Assim, os produtos internos em V são exata te as formas positiva-definidas em V.

.3: Se φ_1, φ_2 são funcionais lineares em V, V real, podemos definir uma forma bilinear $\varphi: V \times V \to R$ por $,v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v)$. Caso V seja complexo $\varphi(u,v) =$ $_1(u)\,\overline{\varphi_2(v)}$ definirá uma forma bilinear em V.

..4: O Exemplo 4.1.10 dá um critério para que a forma $\varphi: R^2 \to R$ definida por $\varphi(u,v) = X \cdot AY^t$, onde $= (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, se- positiva-definida.

1.5: Seja, mais uma vez, $V = R^2$, $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e ponha $\varphi(u,v) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2$. imediato verificar que φ é uma forma bilinear. Por ou o lado. $2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2 =$ $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. A matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ é a matriz forma φ em relação à base canônica de R^2.

Se $\varphi: V \times V \to K$ é uma forma bilinear e $= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, $u = \Sigma x_i v_i$, $v = \Sigma y_j v_j$, ntão $\varphi(u,v) = \varphi(\Sigma x_i v_i, \Sigma y_j v_j) = \sum_i x_i\, \varphi(v_i, \Sigma y_j v_j) =$ $\sum_i x_i (\sum_j \bar{y}_j\, \varphi(v_i, v_j)) = \sum_{i,j} x_i\, \bar{y}_j\, \varphi(v_i, v_j)$. Se $A = (a_{ij})$ a matriz tal que $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

= $(y_1,\ldots,y_n)$, então $\varphi(u,v) = XA\bar{Y}^t$. A é chamada de atriz de φ na base β.

Se $T:V \to V$ é uma transformação linear e $(\,,\,)$ é n produto interno em V, então verfica-se, fàcilmente, ue a função $\varphi:V\times V \to K$ definida por $\varphi(u,v) = (Tu,v)$ é na forma bilinear. O fato seguinte é mais interessante:

EMA 6.1.6 - Seja $\varphi:V\times V \to K$ uma forma bilinear. Então, existe uma única transformação linear $_\varphi:V \to V$ tal que $\varphi(u,v) = (T_\varphi(u),v)$, $\forall\, u,v \in V$.

emonstração: Fixemos u e consideremos a função $\varphi_u:V \to K$ dada por $\varphi_u(v) = \overline{\varphi(u,v)}$. Vemos ntão que $\varphi_u(v_1+v_2) = \overline{\varphi(u,v_1+v_2)} = \overline{\varphi(u,v_1)} + \overline{\varphi(u,v_2)} =$ $\varphi_u(v_1) + \varphi_u(v_2)$ e $\varphi_u(\lambda v) = \overline{\varphi(u,\lambda v)} = \overline{\lambda\varphi(u,v)} = \lambda\varphi_u(v)$, que mostra ser φ_u um funcional linear. Mas então, pe- teorema de representação dos funcionais lineares, exis um único u' tal que $\varphi_u(v) = (v,u')$, $\forall\, v \in V$. Mas $_u(v) = \varphi\overline{(u,v)}$ e assim $\varphi(u,v) = (\overline{v,u'}) = (u',v)$. A fun- o $T:V \to V$ definida por $u \mapsto u'$ é linear. Para provar so, devemos mostrar que $T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ e $\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall\, \lambda \in K$, $u,u_1,u_2 \in V$. Mas $\varphi(u_1,v) = (Tu_1,v)$, $u_2,v) = (Tu_2,v)$ e $\varphi(u_1+u_2,v) = (T(u_1+u_2),v)$, $\forall\, v \in V$. s como $\varphi(u_1+u_2,v) = \varphi(u_1,v) + \varphi(u_2,v)$, vem que $(u_1+u_2),v) - (T(u_1),v) - (T(u_2),v) = 0$, $\forall\, v \in V$ ou seja

$(u_1+u_2) - T(u_1) - T(u_2), v) = 0, \forall v \in V$ e assim $(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$. De maneira análoga, vemos que $(\lambda u) = \lambda T(u)$ e o teorema fica demonstrado.

Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V $u = \Sigma x_i v_i$, $v = \Sigma y_j v_j$, então $\varphi(u,v) = XT]_\beta^\beta \bar{Y}^t$, com $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Uma verificação interessante é a seguinte: se β' outra base ortonormal, X_1 e Y_1 são as matrizes das oordenadas de u e v em relação a β', então $\varphi(u,v) = X_1 \; T]_{\beta'}^{\beta'} \bar{Y}_1^t$. Mas $T]_{\beta'}^{\beta'} = I]_{\beta'}^{\beta} T]_\beta^\beta \; I]_\beta^{\beta'}$ e assim $\varphi(u,v) = X_1 \; I]_{\beta'}^{\beta} T]_\beta^\beta \; I]_\beta^{\beta'} \bar{Y}_1^t = (X_1 \; I]_{\beta'}^{\beta})(T]_\beta^\beta) \, I]_\beta^{\beta'} \bar{Y}_1^t$. Como $_1 \; I]_{\beta'}^{\beta} = X$, $Y_1 \; I]_{\beta'}^{\beta} = Y$ e $I]_{\beta'}^{\beta}$ é uma matriz unitária, ntão $(I]_{\beta'}^{\beta})^{-1} = I]_\beta^{\beta'} = (\overline{I]_{\beta'}^{\beta}})^t$ e assim

$$X_1 \; I]_{\beta'}^{\beta})(T]_\beta^\beta)(I]_\beta^{\beta'} \bar{Y}_1^t) = X(T]_\beta^\beta)(\overline{I]_{\beta'}^{\beta}}^t \bar{Y}_1^t) = X \; T]_\beta^\beta (\overline{Y_1 \; I]_{\beta'}^{\beta}})^t =$$
$$X \; T]_\beta^\beta \bar{Y}^t \; .$$

Um raciocínio inteiramente análogo ao de 6.1.6 per ite provar o seguinte:

LEMA 6.1.7 - Seja $\varphi : V \times V \to K$ uma forma bilinear. Então, existe uma única transformação linear $S_\varphi : V \to V$ tal que, $\forall u, v \in V$, $\varphi(u,v) = (u, S_\varphi(v))$.

EXERCÍCIO

6.1.8: Demonstre, com detalhes, o Lema 6.1.7.

Mas se $\varphi(u,v) = (T_\varphi(u),v) = (u,S_\varphi(v)), \forall u,v \in V,$ tão S_φ é a adjunta de T_φ ou seja, $\varphi(u,v) = (T_\varphi(u,v) = (u,T_\varphi^*(v)) = (S_\varphi^*(u),v) = (u,S_\varphi(v)), \forall u,v \in V.$

INIÇÃO 6.1.9 - Se V é um espaço vetorial real, uma forma bilinear $\varphi:V\times V \to R$ é <u>simétrica</u> $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$, $u,v \in V$. Se V é um espaço comple-, e $\varphi:V\times V \to C$ é bilinear, φ é <u>hermitiana</u> se $\varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}$.

EMPLO

1.10: Se $V = R^2$ e $\varphi:V\times V \to R$ é dada por $\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_2 + 6x_2y_2$, vê-se fàcilmente e φ é uma forma bilinear simétrica. O mesmo não aconce com a forma bilinear $\varphi:V\times V \to R$ definida por $\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_2$.

INIÇÃO 6.1.11 - Seja $\varphi:V\times V \to R$ uma forma bilinear simétrica, então a <u>forma quadrática associada</u> a φ é a função $f:V \to R$ definida por $f(v) = \varphi(v,v), \forall v \in V$.

Por exemplo, se $v = (x_1,x_2)$, a forma quadrática sociada com o primeiro exemplo de 6.1.10 é $f(v) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$.

Observe que, para definirmos uma forma quadrática

m um espaço vetorial real partimos de uma forma bilinear imétrica. A razão desta exigência é que, então, podemos econstruir a forma bilinear original, a partir da forma quadrática associada a ela, como mostrado a seguir:

TEOREMA 6.1.12 - Seja $f:V \to R$ a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica $\varphi:V\times V \to R$. Então φ fica unìvocamente determinada por f.

Demonstração: É fácil ver que $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}[f(u+v)-f(u)-f(v)]$, pois $f(u+v) = \varphi(u+v,u+v) = \varphi(u,u+v) + \varphi(v,u+v) = \varphi(u,u) + \varphi(v,v) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) = f(u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + f(v)$ e como φ é simétrica segue-se que $f(u+v) - f(u) - f(v) = 2\varphi(u,v)$ ou seja, o valor de $\varphi(u,v)$ fica perfeitamente determinado pelos valores da forma quadrática associada a φ.

A situação para o caso complexo é ligeiramente diferente, e por isso êste caso é tratado em separado:

DEFINIÇÃO 6.1.13 - Se $\varphi:V\times V \to C$ é uma forma bilinear a forma quadrática associada a φ é a função $f:V \to C$ definida por $f(v) = \varphi(v,v)$, $v \in V$.

Observe que não exigimos que φ seja hermitiana. Compare o teorema abaixo com seu análogo no caso real:

TEOREMA 6.1.14 - Se $f:V \to C$ é a forma quadrática asso-

ada à forma bilinear $\varphi: V \times V \to C$, então φ fica unìvomente determinada por f.

monstração: Consideremos a expressão

$$B(u,v) = f(u+v)+if(u+iv) - f(u-v) - if(u-iv).$$

Então, $B(u,v) = \varphi(u+v,u+v) + i\varphi(u+iv,u+iv) - \varphi(u-v,u-v) - i\varphi(u-iv,u-iv) = 4\varphi(u,v)$ e, assim, o valor $\varphi(u,v)$ fica completamente determinado pelos valores forma quadrática associada a φ.

EMPLOS

.1.15: Considere a forma quadrática $f: R^2 \to R$ dada por $f(u) = 6x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$ e as formas bilineares φ_1 e φ_2 definidas por

$$\varphi_1(u,v) = (x_1,x_2)\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_2(u,v)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

emos então que $\varphi_1(u,u) = \varphi_2(u,u) = f(u), \forall u \in R^2$ e êste exemplo mostra a necessidade de exigir que, no caso real, forma bilinear seja simétrica, de outra maneira a forma ilinear não ficaria unìvocamente determinada pela forma uadrática associada a ela.

.1.16: Seja, por exemplo, a forma quadrática $f: R^3 \to R$ dada por $f(x,y,z) = 3x^2 + 3xy + 7y^2 - 4yz - z^2$. ntão, a forma bilinear simétrica φ de que provém f erá dada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

seja $\varphi((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = (x_1,y_1,z_1) \; A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Em geral, se $f:V \to R$ é uma forma quadrática e $= \Sigma x_i v_i$, então $f(v) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}} a_{ij}\, x_i x_j$ por quê?) e a forma bilinear simétrica à qual f está associada é definido pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12/2} & \cdots & a_{1n/2} \\ a_{12/2} & \ddots & & a_{2n/2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n/2} & a_{2n/2} & & a_{nn/2} \end{pmatrix}$$

A reconstituição de uma forma bilinear $\varphi:V\times V \to C$ partir da forma quadrática $f:V \to C$ associada a ela não apresenta problemas: os coeficientes da matriz são obtidos imediatamente da expressão $f(v) = f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \bar{x}_j$.

Já sabemos que transformações lineares auto-adjun-

são diagonalizáveis em bases ortonormais. Passamos, ra, a ver que contribuição o teorema espectral traz ao udo das formas quadráticas. Antes, alguns fatos:

INIÇÃO 6.1.17 - Uma forma quadrática $f:V \to C$ é dita <u>hermitiana</u> se a forma bilinear φ à l está associada é hermitiana.

IA 6.1.18 - Uma forma quadrática $f:V \to C$ é hermitiana se e sòmente se, $\forall v \in V$, $f(v)$ é real.

<u>nonstração</u>: Por 6.1.14, usando a identidade aí empregada, vemos imediatamente que $\varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}$ erifique isso!). Por outro lado, se f é hermitiana, tão de $\varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}, \forall u,v \in V$, segue-se que $\varphi(v,v)=$ $\overline{\rho(v,v)}$ logo $f(v) = \varphi(v,v)$ é real.

ERCÍCIO

1.19: Complete a demonstração esboçada em 6.1.18.

<u>servação</u>: êste lema não é necessário na demonstração do teorema seguinte.

Podemos, agora, passar ao teorema importante do rágrafo:

OREMA 6.1.20 - Seja $f:V \to K$ uma forma quadrática qualquer se $K = R$ e hermitiana se $K = C$. iste então uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de

tal que, $\forall v \in V$, $v = \Sigma x_i v_i$, temos $f(v) = \Sigma \lambda_i x_i \bar{x}_i$, $\lambda_i \in R$, $i=1,2,\ldots,n$ (observe que se $K = R$, $f(v) = \Sigma \lambda_i x_i^2$).

Demonstração: Se $K = R$, f provém de uma forma bilinear simétrica φ (por quê?) e assim, se $\varphi(u,v) = (T(u),v)$, $\forall u,v \in V$, então T é auto-adjunta; mas, então, pelo teorema espectral, existe uma base ortonormal $\beta = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ de V formada por auto-vetores de T. Se $v = \Sigma x_i v_i$ e $Tv_i = \lambda_i v_i$, então $f(v) = \varphi(v,v) = (T(v),v) = (T(\Sigma x_i v_i), \Sigma x_j v_j) = \sum_{i,j} \lambda_i x_i x_j (v_i,v_j) = \sum_i \lambda_i x_i^2$, pois β é ortonormal. Se $K = C$ então f é associada a uma forma hermitiana φ logo se $\varphi(u,v) = (Tu,v)$, $\forall u,v \in V$, então T é auto-adjunta e a demonstração prossegue como antes, e obtemos finalmente que $f(v) = \varphi(v,v) = \sum_i \lambda_i x_i \bar{x}_i$.

EXEMPLO

6.1.21: Considere a forma quadrática $f:R^3 \to R$ definida por $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Achamos fàcilmente que f provém da forma bilinear simétrica definida por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Uma base ortonormal em relação à qual A se torna diagonal é $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e em relação a esta base f será dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2$.

RCÍCIO

.22: Complete os detalhes de 6.1.21.

- A equação geral do segundo grau

Passamos, agora, a aplicar os resultados de 6.1 estudo das quádricas e das cônicas.

INIÇÃO 6.2.1 - Uma equação do 2º grau com coeficientes reais é uma expressão da forma

$$_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 + 2b_1\, x_1x_2 + 2b_2\, x_1x_3 + 2b_3\, x_2x_3 +$$
$$_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + d = 0.$$

INIÇÃO 6.2.2 - Uma quádrica é o lugar geométrico dos pontos de R^3 cujas coordenadas $,x_2,x_3)$ satisfazem uma equação do 2º grau.

Observe que nem tôda equação do 2º grau determina lugar geométrico não vazio do espaço: por exemplo, $y^2+z^2+1 = 0$; por outro lado, o lugar determinado por $y^2+z^2 = 0$ é um único ponto, a origem.

RCÍCIO(*)

.3: Identifique no R^3 os lugares geométricos definidos pelas equações abaixo:

---

stes exercícios são exemplos do livro "Vetores e Matrizes" de N.M.dos Santos (IMPA, 1970), a quem agradecemos permissão para usá-los.

a) $x^2 = 4y$

b) $x^2+y^2 = 4z$

c) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1 = 0$

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a,b,c > 0$

e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a,b,c > 0$

f) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a,b,c > 0$

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

h) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e v é o vetor de R^3 cujas coordenadas na base canônica β são dadas por X, então pondo $f(v) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 + 2b_1\, x_1x_2 + 2b_2\, x_1x_3 + 2b_3\, x_2x_3 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + d$, vemos que

$$f(v) = X^tAX + BX + d \ , \quad \text{onde}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 & b_3 \\ b_2 & b_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (c_1,c_2,c_3) \ .$$

Por 6.1.20, existe uma base ortonormal β' do R^3 tal que $P^{-1}AP$ é diagonal, onde $P = I]_{\beta'}^{\beta}$; se $Y = v]_{\beta'}$, en-

, $Y = P^{-1}X$ donde $X = PY$, $X^t = Y^tP^t$ logo

$$f(v) = Y^tP^tAPY + BPY + d$$

.e P^tAP é diagonal (lembre-se de que $P^{-1} = P^t$!) e

im podemos enunciar:

REMA 6.2.4 - Dada uma equação geral do segundo grau $X^tAX + BX + d$, existe uma mudança orto-mal de eixos tal que $X^tAX + BX + d = Y^tCY+DY+d$, onde é uma matriz diagonal.

Observe, além disso que se $X = Z + T$, uma trans-ão, então $X^tAX + BX + d = (Z^t+T^t)A\ (Z+T) + B(Z+T) + d =$ $^tAZ + NZ + e$ e assim vemos que uma translação não al-a a parte quadrática homogênea da equação do 2º grau X + BX + d.

Consideremos agora a equação $Y^tCY + DY + d +$ $_1y_1^2 + c_2y_2^2 + c_3y_3^2 + d_1y_1 + d_2y_2 + d_3y_3 + d$. Se $\neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, ponhamos $z_i = y_i + \frac{d_i}{2c_i}$ e então $_i^2 + d_iy_i = c_iz_i^2 - \frac{2d_i^2}{4c_i}$ ou seja, se $c_i \neq 0$, é possível minar o têrmo linear em y_i.

Desta maneira, podemos enunciar

REMA 6.2.5 - Tôda equação do 2º grau, $X^tAX + BX + d$, pode ser transformada, por meio de um mo-ento rígido do R^3 (uma transformação ortogonal segui-

da de uma translação), em um dos tipos

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + k = 0 \qquad c_1,c_2,c_3 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + d_3x_3 + k = 0 \qquad c_1,c_2 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + d_2x_2 + d_3x_3 + k = 0 \qquad c_1 \neq 0$$

Estas equações podem ainda ser simplificadas, de acôrdo com o lema abaixo:

LEMA 6.2.6 - Dada uma expressão do tipo $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + k$ é possível, por meio de uma transformação ortonormal de bases, levá-la à forma $fy_1 + k = 0$.

Demonstração: Seja $f = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ e P a matriz de uma transformação ortonormal que leva $e_1 = (1,0,0)$ em $e_1' = (\frac{d_1}{f}, \frac{d_2}{f}, \frac{d_3}{f})$. Assim, a primeira coluna de P é o vetor e_1'. Como $X = PY$, então $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + k = f\ e_1' \cdot X + k = f \cdot e_1' \cdot PY + k = fg_1 + k$ (por quê?).

EXERCÍCIO

6.2.7: Interprete, geomètricamente, o Lema 6.2.6.

Podemos, enfim, escrever:

TEOREMA 6.2.8 - Tôda equação do 2º grau pode ser transformada, por movimentos rígidos do R^3, em uma das formas

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + k = 0 \qquad c_1, c_2, c_3 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + d_3x_3 + k = 0 \qquad c_1, c_2 \neq 0$$

$$c_1x_1^2 + d_2x_2 + k = 0 \qquad c_1 \neq 0$$

$$d_1x_1 + k = 0 \qquad d_1 \neq 0$$

Exemplos concretos de aplicação podem ser encontra-s no livro "Vetores e Matrizes" de N.M. dos Santos, PA, Rio de Janeiro, 1970.

ERCÍCIO

2.9: Mostre que ao aplicar o processo do Lema 6.2.6 às equações descritas em 6.2.5, a parte quadrática o se altera.

CAPÍTULO 7

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Êste capítulo apresenta alguns exercícios dados em vas, testes ou que merecem destaque por serem interes- tes. Os exercícios, propositadamente, não estão organi os por ordem de apresentação do assunto ou por dificul e crescente.

Seja $T: R^3 \rightarrow R^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+4y+6z,\ 2x+5y,\ 0)$$

Seja T^* o operador adjunto de T, em relação ao pro- interno usual $\langle X,Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Então $T^*(x,y,z)$ é igual a:

1. $(x+2y,\ 4x+5y)$
2. $(0,\ x+2y,\ 4x+5y)$
3. $(x+4y+6z,\ 2x+5y,\ 0)$
4. $(x+2y,\ 4x+5y,\ 6x)$
5. $(6x,\ 4x+5y,\ x+2y)$

.-.

2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sôbre $\mathbb{R}$. Seja φ um funcional linear $\varphi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Assinale, dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

1. Tôdo funcional linear em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma: $\varphi(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ para $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ onde $(\alpha,\beta,\gamma) \in \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Há uma infinidade de funcionais lineares em $\mathbb{R}^3$ que se anulam nos vetores $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$, e o conjunto dêstes funcionais é um subespaço.

3. Sejam φ_1 e φ_2 dois funcionais lineares em $\mathbb{R}^3$, arbitrários. Então $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\varphi_1 = a\varphi_2$$

4. $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1 \qquad \forall \varphi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

5. φ é sempre sobrejetor, mas nunca é injetor.

.-.

3. Considere o espaço vetorial sôbre $\mathbb{R}$ das funções polinomiais de grau ≤ 2, munido do produto interno:

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

e seja o operador linear $T:\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$
$p \longmapsto p'$

onde p' é a derivada de p.

Seja T^* o operador adjunto de T em relação ao produto interno definido acima. Se $p_0 \in \mathcal{P}_2$ é tal que

$_o(x) = 1$ para $\forall x \in \mathbb{R}$, então T^*p_o é o vetor $\ell_o \in P_2$ al que $\ell_o(x)$, para $\forall x \in \mathbb{R}$, é igual a:

. Zero
. $12x + 6$
. $12x - 6$
. $12x$
. Nenhuma das respostas acima

.-.

ejam V e V' espaços vetoriais sôbre um mesmo coro K, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V, $' = \{v_1', v_2', \ldots, v_m'\}$ uma base ordenada de V', e uma ransformação linear $T: V \to V'$

$$v \mapsto v' = Tv$$

onsidere a afirmação $\mathcal{A}$ abaixo:

AFIRMAÇÃO $\mathcal{A}$

Para $\forall v \in V$, existem funcionais lineares $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m : V \to K$ tais que:

$$v' = Tv = \varphi_1(v)v_1' + \varphi_2(v)v_2' + \ldots + \varphi_m(v)v_m'$$

odemos concluir então que:

. $\mathcal{A}$ é falsa porque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ não são funcionais lineares.
. $\mathcal{A}$ só é verdadeira se β fôr ortonormal.

3. $\mathcal{A}$ só é verdadeira se T fôr um isomorfismo.
4. Em relação ao produto interno para o qual β é ortonormal, o vetor que representa o funcional φ_i é a i-ésima coluna da matriz $T]_{\beta'}^{\beta}$.
5. Os funcionais $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ não dependem da base β escolhida em V.

.-.

5. Considere a transformação:

$$T: R^3 \to R^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, \quad x_2 - x_3)$$

As dimensões do núcleo e da imagem de T são, respectivamente:

A) zero e um

B) dois e três

C) dois e um

D) um e dois

E) um e um

.-.

6. Indique qual das afirmações abaixo é a correta:

A) Tôda transformação linear sobrejetora tem forçosamente núcleo de dimensão zero.

) Se T é uma transformação linear entre dois espaços V e W e dim V < dim W, então T não pode ser sobrejetora.

) Dado um espaço vetorial V de dimensão n, e n+1 vetores de V, então é possível achar, entre êstes (n+1) vetores, uma base para V.

) Seja V o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤n. A transformação linear $D:V \to V$ é sobrejetora, mas não é injetora, pois $D(a_o) = 0$.

) A dimensão de um espaço vetorial V é igual ao número de elementos de um conjunto qualquer de geradores.

.-.

é uma transformação linear $R^2 \to R^2$ tal que:

$$T(1,1) = (3,4)$$
$$T(1,-1) = (1,-2)$$

ntão T(1,0) e T(0,1) são, respectivamente:

) (1,0) e (0,1)

) (2,0) e (1,0)

) (2,1) e (1,3)

) (1,0) e (1,3)

(-1,1) e (1,-1)

.-.

. Indique qual das afirmações abaixo é a correta:

A) O conjunto dos polinômios reais de grau igual a n forma um espaço vetorial sôbre R.

B) O conjunto das matrizes 3×3 que têm o determinante não nulo forma um espaço vetorial.

C) O conjunto das funções $f: R \to R$ tais que $f(0) = f(7)$ forma um espaço vetorial.

D) O conjunto das funções $f: R \to R$ tais que $f(0) = f(7) = 1$ forma um espaço vetorial.

E) Tôdas as afirmações acima estão erradas.

.-.

9. Considere as funções f_1 e f_2 do espaço das funções reais de uma variável real tais que:

$$f_1: x \to e^x$$
$$f_2: x \to e^{2x}$$

Quero mostrar que f_1 e f_2 são linearmente independentes. Para isto, formo a combinação linear:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2$$

e tenho que provar que só posso obter a <u>função</u> 0 tomando $a_1 = a_2 = 0$.

Aplico $a_1 f_1 + a_2 f_2$ no ponto $x = 0$ e obtenho $a_1 +$

$_2 = 0$.

ico $a_1f_1 + a_2f_2$ no ponto $x = 1$ e obtenho $ea_1 +$
$^2a_2 = 0$.

olvo estas duas equações em a_1 e a_2 e vejo que a
ca solução é $a_1 = a_2 = 0$.

ncluo então que f_1 e f_2 são linearmente independentes.

lique qual das afirmações abaixo é a correta:

A demonstração feita acima é incorreta, porque a combinação linear tem que ser zero para <u>todo</u> valor do x, e só foram considerados os valores particulares $x = 0$ e $x = 1$.

A demonstração feita acima é correta.

A demonstração acima mostra que $\{f_1, f_2\}$ é uma base para o espaço $f:R \to R$.

e^x pertence a R, de modo que $e^x.e^x$ é o produto do "vetor" e^x pelo "escalar" e^x. Então e^{2x} é combinação linear de e^x.

A demonstração acima mostra que $\{f_1, f_2\}$ é uma base para o espaço das funções deriváveis $f:R \to R$.

.-.

10. Seja V o espaço vetorial real dos polinômios de grau ≤ 2, munido do produto interno $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ e seja $\begin{matrix} D: V \to V \\ p \mapsto p' \end{matrix}$ a aplicação linear derivação.

Dada a base $\beta = \{1, x, x^2\}$,

a) Calcule $D]_{\beta}^{\beta}$

b) Calcule $D^*]_{\beta}^{\beta}$, sendo D^* o operador adjunto de D.

c) Use o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar β' (na ordem dada)

d) Calcule $D]_{\beta'}^{\beta'}$ em relação à base ortonormal β' do item anterior.

.-.

11. Seja $A: V \to V$ um operador linear, e W uma subespaço de V. Diz-se que o subespaço W é <u>invariante</u> por $A \Leftrightarrow \forall w \in W$, $Aw \in W$. (Por exemplo, qualquer que seja A, $\{0\}$ e V são invariantes por A).

a) Se $V = \mathbb{R}^3$, determine os subespaços de V invariantes pelo operador

$$\begin{matrix} \mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto AX \end{matrix}, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ 0 < \theta < \pi$$

b) Se W é um subespaço unidimensional de V, mostre que W é invariante por $A \Leftrightarrow W$ é gerado por um auto-vetor não nulo de A.

Dada $A = \begin{pmatrix} 41 & 12 & 0 \\ 12 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$,

a) Calcule os auto-valores de A.

b) Determine uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$, de auto-vetores de A, e uma matriz ortogonal P tal que P^tAP seja diagonal.

<u>Sugestão</u>: $P = I]_{\beta}^{\beta'}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

c) Sendo $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 41x^2 + 34y^2 + 25z^2 + 24xy$, e $v = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$, calcule $f(v)$ em função de x', y', z'.

.-.

Seja V o espaço vetorial real das funções $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas de tôdas as ordens, e considere o operador linear

$$T: V \to V$$
$$f \mapsto f' - f$$

Determine uma base para o núcleo de T.

A) $\{1,x\}$; B) $\{ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$; C) $\{1\}$; D) $\{e^x\}$;
E) Núcleo de $T = \{0\}$.

.-.

14. Considere um espaço vetorial V de dimensão n $(n \geq 1)$ sôbre um corpo K, e seja W um subespaço de V de dimensão $n-1$. Pode-se afirmar que:

A) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ é uma base de W, e $v_0 \notin W$, então $\{v_0, v_1+v_0, \ldots, v_{n-1}+v_0\}$ é uma base de V.

B) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ é uma base de W, e $v_0 \notin W$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0\}$ não é base de V.

C) Tôda base de V contém, necessàriamente, pelo menos um vetor de W.

D) A transformação $T: W \to V$, $v \mapsto v$ é sobrejetora.

E) Tôdas as afirmações anteriores são falsas.

.-.

15. Considere o operador linear

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$(x;y,z) \mapsto (5x+2y-z; -8x-3y+2z; -x-2y-3z; 3x-y-5z)$

e o subespaço W do $\mathbb{R}^3$: $W = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$.

Sendo $T(W) \subseteq \mathbb{R}^4$ a imagem de W pelo operador T, pode-se afirmar que:

A) $\dim T(w) = 4$; B) $\dim T(w) = 1$; C) $\dim T(w) =$

D) $\dim T(w) = 3$; E) T é injetor; logo, $T(w) = \{0\}$

.-.

a V o espaço vetorial real dos polinômios de u ≤ 2; dada a base $\beta = [1; x-3; (x-3)^2]$ de V, de- mine as coordenadas de $p(x) = ax^2 + bx + c$ na e B.

(c-3, b-3, a-3); B) (4a+2b+c, 4a+b, a)

(ya+3b+c, 6a+b, c); D) (a+b+c, 2a+b, a);

NRA.

.-.

am $v, w \in \mathbb{R}^n$ (com o produto interno usual) tais $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$, $\|v-w\| = 2$. Calcule $\langle v,w \rangle$.

$\langle v,w \rangle = \frac{1}{2}$; B) $\langle v,w \rangle = -1$; C) $\langle v,w \rangle = 0$;

$\langle v,w \rangle = 2$; E) NRA.

.-.

. V um espaço vetorial <u>complexo</u>, munido de um luto interno $\langle\ ,\ \rangle$, e considere as afirmações $\in$ V arbitrários):

. aplicação $\begin{array}{l} V \to \mathbb{C} \\ v \mapsto \langle v, v_0 \rangle \end{array}$, onde $v_0 \in V$ é fixo, é inear.

$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow \langle v,w \rangle = 0$

3. $\| v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

4. $\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$

5. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Conclua que:

A) 1 e 3 são falsas.

B) Sòmente 2 é falsa.

C) Sòmente 3 é verdadeira.

D) 1,3 e 5 são verdadeiras.

E) Tôdas são falsas.

.-.

19. Considere o $\mathbb{R}^3$ munido de um produto interno $\langle , \rangle$, em relação ao qual a base $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ é ortonormal. Dado o vetor $v_0 = (1,2,2)$ (na base canônica), determine $\{v_0\}^\perp$.

A) $\{(x,y,z) | x-y-2z = 0\}$

B) $\{(x,y,z) | x+2y+2z = 0\}$

C) $\{(x,y,z) | 2x-3y+z = 0\}$

D) $\{(x,y,z) | 2x-y = 0\}$

E) NRA.

.-.

nsidere o R^3 com o produto interno usual; dado o erador linear $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (2x+2y, x+z, x+y)$$

nsidere as afirmações:

A não é inversível

Seja $W = \{(x,y,z) \mid x+y=0\}$; se $w \in W$, então $\langle Aw, w\rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0$.

Em relação à base $\beta = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$:

$[A]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A é auto-adjunto

$A+A^* = I$, onde A^* é o adjunto de A, e I a identidade do R^3.

Conclua que:

1,3 e 4 são verdadeiras

1,2 e 3 são verdadeiras

Sòmente 1 e 3 são verdadeiras

Sòmente 2 e 3 são verdadeiras

Sòmente 3 e 5 são falsas.

.-.

nsidere as afirmações, onde A,B são matrizes quaadas de ordem n.

Se A é inversível, então $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

2. AA^* é auto-adjunta
3. A auto-adjunta $\Rightarrow (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^n$
4. A,B auto-adjuntas $\Rightarrow AB + BA$ auto-adjunta
5. A,B auto-adjuntas; AB é autoadjunta $\Leftrightarrow AB = BA$.

Conclua que:

A) Quatro são falsas
B) Duas são verdadeiras e três são falsas
C) Três são verdadeiras e duas são falsas
D) Quatro são verdadeiras e uma é falsa
E) Tôdas são verdadeiras.

.-.

22. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo. Assinale, dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

A) Existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \ker \varphi$ tal que
$(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
B) $\dim(\ker \varphi) = 1$
C) é sobrejetor, mas não é injetor
D) $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 2$
E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

.-.

m as matrizes M,N,P:

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

-se afirmar que:

Tôdas são diagonalizáveis

Nenhuma é diagonlizável

Sòmente N e P são diagonalizáveis

Sòmente M é diagonalizável

Sòmente P não é diagonalizável

.-.

idere as afirmações, onde $A: V \to V$ é um operador ar, e V um espaço vetorial complexo com um pro- interno $\langle , \rangle$:

e $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de A, então $v \in V \mid Av = \lambda v\}$ é um eubespaço de V.

$= 0$ é auto-valor de $A \Leftrightarrow A$ não é inversível.

e dim V = n, então uma condição suficiente para que A seja diagonalizável é que A tenha n uto-valores distintos.

e A é auto-adjunto, e λ é auto-valor de A, ntão $\lambda \in R$.

e A é auto-adjunto, e v_1, v_2 são auto-vetores

linearmente independentes de A, então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Conclua que:

A) Tôdas são falsas

B) Tôdas são verdadeiras

C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa

D) Três são verdadeiras e duas são falsas

E) Duas são verdadeiras e três são falsas.

.-.

5. Sejam $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,-1)$.

(a) Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = -v_2$, $T(v_3) = 2v_3$

i) Calcule $T(E_1)$, $T(E_2)$ e $T(E_3)$, onde $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$.

ii) Obtenha uma fórmula para $T(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Sugestão: $(x,y,z) = xE_1 + yE_2 + zE_3$

iii) Calcule a dimensão do núcleo de T, e decida se T é inversível.

.-.

Considere a aplicação linear $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \mapsto (u,v,w)$

onde

$$\begin{cases} u = ax + y \\ v = x + ay \\ w = (a+2)x + (1+2a)y \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

e seja W um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$, independente de a, que contém $\text{Im}\, T_a$ para todo valor de a.

a) Determine W.

b) Mostre que $\text{Im}\, T_a = W$ para todo valor de a, com exceção de certos valores particulares. Calcule tais valores e determine as dimensões do núcleo e da imagem de T_a para cada um dêles.

.-.

Sejam as bases do $\mathbb{R}^3$:

$\beta = \{(v_1 = (1,1,1), \; v_2 = (1,1,-1), \; v_3 = (-1,0,1)\}$

$\beta' = \{(E_1 = (1,0,0), \; E_2 = (0,1,0), \; E_3 = (0,0,1)\}$

Dado $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, as coordenadas de v em relação a β' são dadas por (onde I é a identidade do R^3):

A) $I]_{\beta}^{\beta'} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$

C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$

D) $I]_{\beta'}^{\beta} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

E) NRA

.-.

28. Considere o $\mathbb{C}^3$ com o produto interno usual: $\langle X,Y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$ e seja W o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1;i;0)$ e $v_2 = (1;2;1-i)$. Uma base ortonormal de W é formada pelos vetores:

A) $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{i}{\sqrt{2}}; 0)$ e $(\frac{1+2i}{\sqrt{18}}; \frac{2-i}{\sqrt{18}}; \frac{2-2i}{\sqrt{18}})$

B) $(1;i;0)$ e $(\frac{1+2i}{2}; \frac{2-i}{2}; 1-i)$

C) $(1;i;0)$ e $(1;2;1-i)$

D) $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{i}{\sqrt{2}}; 0)$ e $(1+2i; \frac{2-i}{2}; \frac{2-2i}{\sqrt{18}})$

E) NRA

.-.

. Considere o $\mathbb{R}^2$ com o produto interno

$\langle X,Y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, onde $X = (x_1,x_2)$ e $Y = (y_1,y_2)$.

Os vetores de norma igual a $2\sqrt{2}$, ortogonais ao vetor $(6,-3)$, são:

A) $(2,0)$ e $(2\sqrt{2},0)$

B) $(2,2)$

C) $(2\sqrt{2}/5,\ 4\sqrt{2}/5)$

D) $(0,2)$ e $(0,-2)$

E) NRA

.-.

. Sejam V o espaço real dos polinômios de grau ≤ 3, $D:V \to V$ a aplicação linear derivada, e as bases $\beta = \{1;t;t^2;t^3\}$ e $\beta' = \{1;t-1;t^2-t-1;t^3-t^2-t-1\}$.

Determine $D]_{\beta'}^{\beta}$.

A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E) NRA

.-.

1. Sejam A, B matrizes hermitianas. Considere as afirmações:

1. $A + B$ é hermitiana
2. $\forall\, x \in C$, xA é hermitiana
3. AB é hermitiana
4. B^* é hermitiana

Conclua que:

A) Tôdas são verdadeiras

B) Sòmente 4. é falsa

C) Sòmente 2. é falsa

D) 1. e 4. são verdadeiras

E) 1. e 3. são verdadeiras.

.-.

33.

32. Seja $T: R^3 \to R^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (x+2y,\ 3x-4x, y)$. Determine $T^*(x,y,z)$, onde $T^*: R^3 \to R^3$ é o operador adjunto de T.

34

A) $T^*(x,y,z) = (x-2y,\ 3x+4z,\ -y)$

B) $T^*(x,y,z) = (x+3y,\ 2x+z,\ -4y)$

C) $T^*(x,y,z) = (x-3y,\ 2x-z, y)$

D) $T^*(x,y,z) = (x+2y,\ 3x-4z, y)$

E) NRA

.-.

A matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b & c & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & d \end{pmatrix}$$

é ortogonal (real unitária). Conclua que:

A) $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B) $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D) $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

E) NRA.

.-.

Seja V o espaço vetorial real dos polinômios de grau ≤ 2, com o produto interno $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, em relação ao qual os polinômios

$P_1(t) = 1$, $P_2(t) = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $P_3(t) = \frac{6t^2 - 6t + 1}{\sqrt{5}}$

constituem uma base ortonormal de V. Considere o funcional linear $f: V \to R$; dado por $f(p) = p(1)$, $p \in P$; determine $q \in V$ tal que

$f(p) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in V$.

A) $q(t) = \dfrac{18t^2 + 2t + 8}{15}$

B) $q(t) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} t + \dfrac{1}{\sqrt{5}} t^2$

C) $q(t) = \dfrac{18t^2 - 8t + 13}{15}$

D) $q(t) = p_1 + p_2(t) + p_3(t)$

E) NRA

.-.

35. Dada a matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, determine uma matriz inversível P tal que $P^{-1}A\,P$ seja diagonal.

A) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

B) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

C) $P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

D) $P = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

E) NRA.

.-.

36. Determine tôdas as soluções de

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 14x_3 - 8x_4 &= 24 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= -2 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 15x_2 - x_3 + 5x_4 &= -46 \end{aligned}$$

Sejam $V = R^3$, $W = R^2$ e $T: R^3 \to R^2$ dada por $(x,y,z) \longmapsto (2x+y,\ x-y+3z)$. Considere em V^* e W^* as bases $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $\beta' = \{g_1, g_2\}$ definidas por

f_1	f_2	f_3	g_1	g_2
$e_1 \to 1$	$e_1 \to 0$	$e_1 \to 1$	$e_1' \to 1$	$e_1' \to 1$
$e_2 \to -1$	$e_2 \to 1$	$e_2 \to 0$	$e_2' \to 0$	$e_2' \to 2$
$e_3 \to 0$	$e_3 \to 2$	$e_3 \to -1$		

onde $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\alpha' = \{e_1', e_2'\}$ são as bases canônicas do R^3 e R^2 respectivamente.

1. Ache $T^*]_{\beta^*}^{\beta'^*}$
2. Ache $T^*]_{\alpha^*}^{\alpha'^*}$

.-.

Se $U \subseteq V$, U um subconjunto, defina o <u>anulador</u> de U, U^o:

$$U^o = \{f \in V^* \mid f(v) = 0,\ \forall v \in U\}$$

1. Mostre que U^o é um subespaço vetorial de V^*.
2. Se $T: V \to W$ é linear, mostre que se $g \in W^*$, $g \in (I(T))^o \Leftrightarrow g \in N(T^*)$.

.-.

39. Sejam U e V subespaços de W, W de dimensão finita.

Defina $U + V = \{u+v \mid u \in U,\ v \in V\}$

1. Mostre que $U+V$ é um subespaço de W.
2. Mostre que $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

.-.

40. Sejam V um espaço vetorial sôbre um corpo K, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V, W um subespaço de V, e $\{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base de W $(r<n)$. Pode-se afirmar que:

A) $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ é base de V.

B) $\{v_1, \ldots, v_r\}$ também é base de W.

C) Existem r vetores de B que formam uma base de W.

D) Quaisquer r vetores de B formam uma base de W.

x E) Tôdas as afirmações anteriores são falsas.

.-.

41. Considere um espaço vetorial V, de dimensão n, sôbre um corpo K, e seja L um subcorpo de K. Sabemos que K é um espaço vetorial <u>sôbre L</u>; seja r sua dimensão. A dimensão de V, considerado como espa

o vetorial sôbre L é igual a:

) $(n-r).n$ B) $n+r$ C) nr D) $nr-1$

) Nenhum dos valores anteriores.

.-.

eja V o espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ a oeficientes reais, e considere os seguintes subconjun os de V:

$W_1 = \{A \in V \mid A$ é inversível$\}$

$W_2 = \{A \in V \mid A$ é simétrica$\}$

$W_3 = \{A \in V \mid A^2 = A\}$

$W_4 = \{A \in V \mid AB = BA\}$ sendo $B \in V$ uma matriz fixa.

onclua que:

) W_2 e W_3 são subespaços de V.

) Sòmente W_1 é subespaço de V.

W_1, W_2 e W_4 são subespaços de V.

W_2 e W_4 são subespaços de V.

Todos são subespaços de V.

.-.

3. Considere as seguintes aplicações:

$F: R \to R^2$
$x \mapsto (\text{sen } x, 2x)$

$G: R \to R$
$x \mapsto x+5$

$H: R^2 \to R^2$
$(x,y) \mapsto (x+y, x)$

$T: R^2 \to R^3$
$(x,y) \mapsto (x+1, 2y, x+y)$

Pode-se afirmar que:

A) G e H são lineares.

B) Sòmente H é linear.

C) G e T são lineares.

D) Sòmente F não é linear.

E) Nenhuma delas é linear.

.-.

44. Seja V o ospaço vetorial real das matrizes 2x2 a coeficientes reais, e W o subespaço de V gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Considere as afirmações:

1. dim W = 2

2. Tôda matriz simétrica de V pertence a W.

3. Tôda matriz antisimétrica de V pertenoe a W.

4. A aplicação $F: R^2 \to W$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ é um isomorfismo.

onclua que:

) Tôdas são verdadeiras.

) Três são verdadeiras e uma é falsa.

) Duas são verdadeiras e duas são falsas.

) Sòmente 3 é falsa.

) Tôdas são falsas.

.-.

nsidere a aplicação linear $L_A: R^n \to R^m$ definida
r $L_A(X) = AX$, onde A é uma matriz fixa $m \times n$, e
seguintes afirmações:

O núcleo de L_A é o espaço das soluções do sistema $AX = 0$.

Uma conseqüência do teorema do núcleo e da imagem é que, se $m < n$, então $AX = 0$ tem solução não trivial.

O sistema $AX = Y$ tem solução se, e sòmente se, $Y \in \text{Im } L_A$.

Para cada $Y \in R^m$, $X \in L_A^{-1}(Y) \Leftrightarrow X = X_1 + X_2$, onde X_1 é tal que $AX_1 = Y$, e X_2 pertence ao núcleo de L_A.

Se $m = n$, então L_A é um isomorfismo $\Leftrightarrow A$ é in-

versível.

Conclua que:

A) Duas são verdadeiras e três são falsas.

B) Três são verdadeiras e duas são falsas.

C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa.

D) Sòmente 3. é verdadeira.

E) Tôdas são verdadeiras.

.-.

46. Seja V o espaço vetorial real das matrizes simétricas 4×4 a coeficientes reais, e a aplicação linear $Tr: V \to \mathbb{R}$, $Tr(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$. O núcleo de Tr tem dimensão igual a:

A) 9 B) 16 C) 15 D) 0

E) O núcleo de Tr não tem dimensão finita.

.-.

47. Seja a aplicação linear $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (ax, by)$, com a e b constantes não nulas. Pode-se afirmar que:

A) A imagem da reta $S = \{(x,y) \mid y=x\}$ é a reta S.

B) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

é a elipse $E = \{(u,v) \mid \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1\}$.

) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) | x^2+y^2=1\}$ é a circunferência $E = \{(u,v) \mid u^2+v^2 = 1\}$.

) A imagem da circunferência $S = \{(x,y) | x^2+y^2=1\}$ é a elipse $E = \{(u,v) \mid \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\}$.

) Tôdas as afirmações anteriores são falsas.

.-.

ejam V e U espaços vetoriais de dimensão finita ôbre um corpo K, dim V = m, dim U = n, e $F: V \to U$, $: U \to V$ aplicações lineares. Considere as seguintes firmações:

. Se F é injetora, então $n \geq m$.
. Se G é sobrejetora, então $n = m$.
. Se $m = n$, então F e G são bijeções.
. Se $m = n$, então $G = F^{-1}$.
. Se $m < n$, então G e F não são inversíveis.

Conclua que:

) Sòmente 1. e 3. são verdadeiras.
) Sòmente 2. é verdadeira.
) Sòmente 1. e 5. são verdadeiras.

D) Sòmente 4. é falsa.

E) Tôdas são falsas.

.-.

49. Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(x,y) = \frac{1}{2}(5x+y, x+5y)$. Então:

A) T é uma rotação no plano.

B) T é sobrejetora, mas não é injetora

C) T é injetora, mas não é sobrejetora.

D) T é invertível.

E) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

.-.

50. Seja V_n o espaço vetorial sôbre K dos polinômios a coeficientes no corpo K e de grau $\leq n$ (incluindo o polinômio identicamente nulo). Considere a transformação linear $T:V_n \to V_n$, $P_n \mapsto q_n$ onde $q_n(x) \equiv P_n(x+1)-P_n(x)$, $\forall x \in K$. Então:

A) T é sobrejetora.

B) T é injetora.

C) $\dim N(T) = 1$, $\dim I(T) = n-1$.

D) Se W_n é o subespaço de V_n formado pelos polinômios que se anulam na origem, então a transformação linear $\begin{matrix} W_n \to V_n \\ p_n \mapsto q_n \end{matrix}$ (restrição de T a W_n) é injetora.

E) Tôdas as afirmações anteriores são falsas.

.-.

Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $T(1,0) = (0,-1)$ e $T(0,1) = (1,0)$. Calcule T^{27}.

A) $-T$ B) T C) I D) $-I$ E) 0

.-.

Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear tal que $T^2 = 0$; calcule $T(I+T)^n$, n um inteiro positivo.

A) I B) T C) $I + nT$ D) 0

E) Nenhuma das respostas anteriores.

.-.

Dadas as seguintes transformações lineares do R^2 no R^2:

$T_1: (x,y) \mapsto (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)$,

$\theta \in [0,2\pi)$

$T_2 : (x,y) \mapsto (ax,y) \qquad (a > 0)$

$T_3 : (x,y) \mapsto (x,-y)$

$T_4 : (x,y) \mapsto (-x,y)$

Considere as afirmações:

1. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 \qquad (a > 0)$
2. $T_3^2 = I$
3. $T_1 = T_3 \circ T_4 \Leftrightarrow \theta = \pi$
4. Não existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, tal que $T_1(x,y) = \alpha(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Conclua que:

A) 2. 3. e 4. são verdadeiras.

B) Sòmente 2. é verdadeira.

C) Sòmente 1. e 4. são falsas.

D) 2. e 4. são falsas.

E) Tôdas são verdadeiras.

.-.

54. Considere os operadores lineares $T: V \to V$, $L: V \to V$, e as seguintes afirmações:

1. $T^2 = I \Leftrightarrow T = \pm I$
2. Se $L^2 + L - I =)$, então $L^{-1} = L + I$
3. Se $T \circ L = 0$, então $T = 0$ ou $L = 0$

4. $(T+L) \circ (T-L) = T^2 - L^2$

5. Se $T \circ L = 0$, então $L \circ T = 0$.

Conclua que:

A) Três são verdadeiras e duas são falsas.

B) Duas são verdadeiras e três são falsas.

C) Sòmente 2. é verdadeira.

D) Sòmente 1. é falsa.

E) Tôdas são falsas.

.-.

Sejam os vetores $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (1,-1,1)$ e $V_3 = (2,0,-2)$ do R^3. A matriz de reflexão sôbre o plano determinado por V_1 e V_2, tomada em relação à base canônica $\beta' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $T]_{\beta'}^{\beta'}$ é:

A) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ B) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

D) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ E) NRA.

.-.

56. Considere a transformação linear do plano obtida projetando o vetor $v = (x,y)$ ortogonalmente sôbre a reta $L = y-2x = 0$.
A matriz de T em relação à base $= (1,0), (0,1)$ é tal que

A) A soma de seus coeficientes é 9/5.
B) A soma de seus coeficientes é 8/5 e todos são positivos.
C) Os seus coeficientes são todos não nulos e de soma 2.
D) Sòmente um dos coeficientes é não nulo e igual a 1 (um).
E) NRA.

.-.

57. Seja V um espaço vetorial real com produto interno $(,)$.
Assinale qual das afirmações abaixo é falsa.

A) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \forall u,v \in V$
B) $(u,v) = 0 \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
C) $(u,v) = \frac{1}{2} \ (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$
D) Se $u,v \in V$, $v \neq 0$ e $c = \dfrac{(u,v)}{\|v\|^2}$, então $u' = u - c\,v$ é ortogonal a v.

E) Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é uma base qualquer de V e $v = \Sigma x_i v_i$ então $\|v\| = \sqrt{\Sigma x_i^2}$.

.-.

Se $T: R^3 \to R^3$ é dada por $T(x,y,z) = (z,y,x)$ então

A) T é uma rotação em tôrno do vetor $(2,0,-2)$

B) T é uma rotação em tôrno do vetor $(1,1,1)$

C) T é uma rotação em tôrno do vetor $(1,-1,1)$

D) T é uma reflexão sôbre o plano vertical a $(2,0,-2)$ e passando pela origem.

E) NRA.

.-.

Seja T a transformação de R^2 em R^2 definida pela fórmula $T(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$.

A transformação é:

A) Uma reflexão em tôrno de $y=0$ seguida de uma rotação.

B) Uma reflexão em tôrno da reta $2x-y = 0$ seguida de uma dilatação de razão 5 ao longo de $y-x = 0$.

C) Um cisalhamento paralelo ao eixo Ox.

D) Uma reflexão em tôrno de $x-y = 0$ seguida de uma dilatação de razão 5 ao longo de $y-x = 0$.

E) NRA.

.-.

60. Seja $F: R^2 \to R^2$ dada por

$$F(x,y) = (ax + by,\ cx + dy)$$

Suponha que $F(1,0) = (1,2)$ e $F(0,1) = (2,3)$.

Calcule $F(287, -45)$.

A) 369

B) (-315, 287)

C) Impossível calcular com os dados fornecidos.

D) (197, 439)

E) NRA

.-.

61. Considere o R^3 com o produto interno usual, e seja

$S = \{(x,y,z) \mid z=4\}$; determine $S^{\perp}$.

A) $S^{\perp} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

B) $S^{\perp} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

C) $S^{\perp} = \{0\}$

D) $S^{\perp} = \{(x,0,z) \mid x,z \in R\}$

E) NRA.

.-.

. Considere as aplicações

$$F: R^3 \to R^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+y,\ Z+y-x)$$

e

$$G: R^2 \to R^2$$
$$(x,y) \mapsto (-y,x)$$

A) $F \circ G(x,y) = (x-y,\ -y+z-x)$ e $G \circ F$ não está definida.

B) $F \circ G(x,y) = (x-y,\ -y+z-x)$ e $G \circ F(x,y,z) = (x-y,\ z-y,\ x+z)$.

C) $F \circ G$ não está definida e $G \circ F(x,y,z) = (-y, x+z)$.

D) $G \circ F(x,y,z) = (x-y-z,\ x+y)$.

E) NRA.

.-.

}. Verifique qual das afirmações abaixo é verdadeira:

A) Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções, se $g \circ f: A \to C$, a função composta é sobrejetora, então f e g são sobrejetoras.

B) Se $g \circ f: A \to C$ é injetora, então f e g são injetoras.

C) Se $f: A \to B$ é sobrejetora, então existe $g: B \to A$ tal que $h = g \circ f: A \to A$ é a identidade em A, isto é, $h(a) = a$, $\forall a \in A$.

D) Se $f: A \to B$ é injetora, então existe $g: B \to A$

tal que $h = g \cdot f : A \to A$ é a identidade em A, isto é, $h(a) = a$, $\forall a \in A$.

E) Tôdas as afirmações acima são falsas.

.-.

4. Seja $V = \{f: R \to R\}$ o espaço vetorial das funções da reta na reta. Quais dos subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de V?

✓ $M = \{f: R \to R$, tais que $f(1) = 0\}$

$N = \{f: R \to R$, tais que $f(1) = 1\}$

✓ $P = \{f: R \to R$, tais que $f(0) = f(5) = 0\}$

$Q = \{f: R \to R$, tais que $f(x) \geq 0, \forall x\}$

$R = \{f: R \to R$, tais que $f(1) \geq 0\}$

A) M, P, Q, R

X B) M, P

C) Q, R

D) M, N, P

E) NRA.

.-.

Quais dos conjuntos abaixo são espaços vetoriais sôbre o corpo dos números reais?
(As operações são as usuais).

M = conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo a coeficientes reais.

N = $\{f:R \to R\}$ conjunto das funções da reta na reta.

P = conjunto dos números irracionais

Q = conjunto das matrizes $m \times n$ a coeficientes reais.

a) M, N, P, Q

b) M, N, P

c) M, N, Q

d) M, P, Q

e) N, P, Q

.-.

. Ache uma base para o subespaço W do R^4 gerado por

(2,-2,2,6), (-1,1,-1,-3), (3,1,7,5), (1,3,5,-1), (1,1,3,1)

. Conclua que $(x,y,z,t) \in W$ se e sòmente se

$$z = 2x + y$$

e

$$t = 2x - y$$

.-.

67. 1. Mostre que o conjunto S das soluções $(x_1,\dots,x_n) \in$ $\in R^n$ do sistema a coeficientes reais

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

é um subespaço vetorial do R^n.

2. Ache explicitamente uma base para S no caso do sistema

$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0$$
$$x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$$
$$x_4 - 3x_5 = 0$$

.-.

68. Se $v_1 = (1,3,5)$, $v_2 = (2,-1,3)$ e $v_3 = (-3,2,-4)$ são vetores do R^3 resolva a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ e decida se v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes ou independentes.

.-.

69. Prove que:

1) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ constituem uma base para V, então qualquer vetor $v \in V$ se escreve de <u>maneira única</u> como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2) Prove que $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$ formam uma base para o R^3 e exprima o vetor $(5,4,2)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

.-.

). Sejam V e W espaços vetoriais sôbre um mesmo corpo K. Dizemos que uma função $T: V \to W$ é linear se, quaisquer que sejam $u, v \in V$, $k \in K$, vale $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $T(kv) = kT(v)$.

Decida, em cada caso deixando escrito seu raciocínio, se as funções abaixo são lineares:

1. $T: R^n \to R^m$ definida por $T(v) = 0$, $\forall v \in R^n$
2. $T: R^n \to R^n$ definida por $T(v) = v$, $\forall v \in R^n$
3. $T: R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y, y-z, xz)$
4. $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x,y) = (x-y, 2x-5y)$

.-.

Seja V um espaço vetorial. Considere as afirmações:

1. Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são LD então um dêles é combinação linear dos demais.
2. Todo subconjunto de V qus contém um conjunto LD é LD.
3. Todo subconjunto de V contido em um conjunto LD é LD.
4. Se $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ são LI e $u = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m$ então os coeficientes $a_1, \ldots, a_m$ estão univocamente determinados, dado $u \in V$.

Assinale a resposta certa:

A) Tôdas as afirmações acima estão corretas.

B) Apenas uma está incorreta.

C) Duas estão incorretas.

D) Apenas uma está correta.

C) Tôdas são falsas.

.-.

72. Determine o número a para que os polinômios abaixo sejam LD.

$$p_1 = 1 + x^2$$
$$p_2 = x + 3x^2 - x^3 + x^4$$
$$p_3 = x^2 + x^4$$

$$p_4 = 3 + ax + 12x^2 - 4x^3 + x^4$$

A) $a = 12$

B) $a = 4$

C) $a = 3$

D) $a = -4$

E) Impossível - êles são LI para $\forall a \in K$.

.-.

Seja V o espaço das matrizes reais 2×2 e $T: V \to V$ a aplicação linear definida por $T(A) = P.A$, onde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Considere a base de V:

$$\beta = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

As coordenadas do vetor $T(A)$ com respeito à base β são:

A) $(a_{11}-a_{21}, a_{12}-a_{22}, a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})$

B) $(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, -a_{11}+a_{21}, -a_{12}+a_{22})$

C) $(a_{11}+a_{21}, a_{12} + a_{22}, a_{11}-a_{21}, a_{12}-a_{22})$

D) $(-a_{11}+a_{21}, -a_{12}+a_{22}, a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22})$

E) NRA

.-.

4. Seja V o conjunto das matrizes reais $n \times n$ e

$$T: V \to V \quad . \qquad A \mapsto A^t$$

Considere as afirmações:

1. T é linear.
2. $T(AB) = T(A)T(B) = T(B)T(A)$
3. Ker $T \neq \{0\}$.
4. $T^2 = I$
5. $T(AB) = T(B).T(A) \neq T(A).T(B)$ em geral.

Então:

A) 1,2,3,4,5 tôdas verdadeiras.

B) 2 e 3 falsas.

C) 2 e 4 falsas.

D) 1 e 5 falsas.

E) Sòmente uma, entre as afirmações 1,2,3,4,5 é verdadeira.

.-.

75. Dadas as funções 1, $\text{sen}^2 t$, $\cos^2 t$, sen 2t, cos 2t, considere as seguintes afirmações:

1. 1, $\text{sen}^2 t$, $\cos^2 t$ são LD
2. 1, sen 2t, cos 2t são LI
3. 1, $\text{sen}^2 t$, cos 2t são LD
4. 1, sen 2t, cos 2t são LD

Então:

A) Tôdas são verdadeirae.

B) Apenas uma é falsa.

C) Duas são falsas.

D) Apenas uma é verdadeira.

E) Tôdas são falsas.

.-.

Sejam T_1, T_2 e T_3 as aplicações $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que levam o ponto (x,y,z) respectivamonte em:

$(x+y-1,\ y+z,\ z)$, $(x-y+1,\ y,\ 0)$ e $(x+1,\ 2y+z,\ z)$.

Considere as afirmaçoee:

1. T_1, T_2 e T_3 são lineares.
2. $T_2 \circ T_1$ é linear.
3. $T_1 \circ T_3$ é linear.
4. $T_1 \circ T_2$ é a projeção sôbre o plano xOy.

Então:

A) Tôdas são verdadeiras.

B) Apenas uma é falsa.

C) Duas são falsas.

D) Apenas uma é verdadeira.

E) Tôdas são falsas.

.-.

77. Se V é o conjunto das matrizes 2x2 com coeficientes reais e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, defina $T: V \to V$ por $T(A) = AM - MA$.

Assinale a resposta certa:

A) dim Ker T = 0

B) dim Ker T = 1

C) dim Ker T = 2

D) dim Ker T = 3

E) dim Ker T = 4

.-.

78. Seja $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$TE_1 = E_3$ $TE_2 = E_4$ $TE_3 = E_1$ $TE_4 = 0$

Considere as afirmações abaixo:

1. $T^4 = 0$

2. T isomorfismo

3. I-T inversível

4. T injetora

Assinale a resposta certa:

A) Tôdas estão corretas.

B) Apenas uma é falsa.

C) Duas são falsas.

D) Apenas uma é correta.

E) Tôdas são falsas.

.-.

. Seja $V = R^3$ e considere os seguintes subconjuntos de V

1. $\{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
2. $\{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$
3. $\{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
4. $\{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1, x_2$ e x_3 são racionais$\}$
5. $\{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1, x_2$ e x_3 são inteiros$\}$

Então:

A) Todos são subespaços vetoriais de R^3.

B) Nenhum é subespaço vetorial de R^3.

C) 1), 3) e 5) são subespaços vetoriais de R^3.

D) 2), 3) e 4) são subespaços vetoriais de R^3.

E) 1), 2) e 5) são subespaços vetoriais de R^3.

F) 1) e 3) são subespaços vetoriais de R^3.

.-.

80. Chame de V o espaço vetorial real das matrizes 2 x 2 com coeficientes reais e sejam os seguintes subconjuntos de V:

1. As matrizes cujo determinante é zero.
2. As matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$.
3. As matrizes cujo determinante é 1.
4. As matrizes cujos coeficientes são números racionais.
5. As matrizes cujos coeficientes são números pares.

Então:

A) Todos são subespaços vetoriais de V.

B) Nenhum é subespaço vetorial de V.

C) Sòmente um é subespaço vetorial de V.

D) Sòmente dois são subespaços vetoriais de V.

E) Sòmente três são subespaços vetoriais de V.

.-.

81. Seja V o espaço vetorial das funções reais de uma variável real e considere os subconjuntos abaixo de V:

1. $W = \{f \in V \mid f(3) = 1\}$
2. $W = \{f \in V \mid f(n) = 0, \quad \forall n \text{ inteiro}\}$.
3. $W = \{f \in V \mid f(1) = f(-1)\}$.
4. $W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x), \forall x \in R\}$.

5. $W = \{f \in V \mid f(x) = -f(x), \forall x \in R\}$.

Então:

A) Todos são subespaços.

B) Nenhum é subespaço.

C) Sòmente quatro são subespaços.

D) Sòmente três são subespaços.

E) Sòmente dois são subespaços.

.-.

82. Seja $V = R^3$ e considere os vetores $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (0,2,-1)$, $u_3 = (0,1,2)$, $u_4 = (0,2,5)$ e $u_6 = (0,4,1)$. O subespaço gerado por êles é:

A) O espaço V.

B) Um subespaço de dimensão 1.

C) O plano $y = 0$.

D) O plano definido pela equação $y = x$.

E) O plano $x = 0$.

.-.

83. Seja $V = R^3$ e considere os subconjuntos abaixo:

1. $\{(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)\}$.
2. $\{(1,2,0), (0,1,0), (2,-1,0), (4,3,0)\}$.
3. $\{(2,1,0), (1,-1,2), (0,3,-4)\}$.

4. $\{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (2,-1,1)\}$

5. $\{(2,-3,2),\ (2,-4,1),\ (1,-5,7)\}$.

6. $\{(3,0,-2),\ (1,-1,-5)\}$.

Então:

A) Os vetores de 6) formam uma base para R^3.

B) Os vetores de 3) formam uma base para R^3.

C) Os vetores de 2) geram o R^3.

D) Os vetores de 4) geram um subespaço de R^3 de dimensão 2.

E) Tôdas as respostas acima estão erradas.

.-.

84. Considere as afirmações:

1. No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, o subconjunto formado pelas $f:R \to R$ tais que $f(1) = 3 + f(0)$ é um subespaço vetorial.
2. No espaço vetorial das funções reais de uma variável real o subconjunto das $f:R \to R$ tais que $f(x) \geq 1$ é um subespaço vetorial.
3. No espaço vetorial dos polinômios a coeficientes reais o subconjunto dos polinômios cujos coeficientes são números pares constitue um subespaço vetorial.

4. No espaço vetorial dos polinômios a coeficientes reais o subconjunto dos polinômios da forma $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, n arbitrário, é um subespaço vetorial.

Então:

A) 1) e 2) estão certas.

B) 2) está certa e 3) errada.

C) 1) está certa e 4) errada.

D) 2) e 4) estão erradas.

E) 3) está errada e 4) está certa.

.-.

Seja $V = R^3$ e considere os subconjuntos:

1. {(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)}.
2. {(1,2,0), (0,1,0), (2,-1,0), (4,3,0)}.
3. {(2,1,0), (1,-1,2), (0,3,-4)}.
4. {(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)}.
5. {(2,-3,2), (2,-4,1), (1,-5,7)}.
6. {(3,0,-2), (1,-1, 5)}.

Então, a dimensão dos espaços gerados por seus vetores é:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
A)	2	1	3	3	2	1
B)	3	2	2	3	3	2
C)	2	3	3	1	3	2
D)	2	3	3	3	2	2
E)	3	3	3	3	3	2

.-.

86. Uma matriz nxn diz-se diagonal se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Mostre que, no espaço vetorial das matrizes nxn a coeficientes reais, as matrizes diagonais constituem um subespaço vetorial.

.-.

87. Uma matriz nxn é triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $j < i$. Demonstre que, no espaço vetorial das matrizes nxn a coeficientes reais, as matrizes triangulares superior constituem um subespaço vetorial.

.-.

88. Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes nxn de coeficientes reais?

Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes diagonais $n \times n$ a coeficientes reais?

.-.

Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes triangulares superior com coeficientes em um corpo K?

.-.

Uma matriz $n \times n$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j, 1 \leq i,j \leq n$. É anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i,j, 1 \leq i,j \leq n$. Mostre que as matrizes simétricas $n \times n$ formam um subespaço vetorial do espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com coeficientes em um corpo K. Mostre que o mesmo vale para as matrizes anti-simétricas. Determine as dimensões dêstes subespaços.

.-.

As matrizes $m \times n$ com coeficientes em um corpo K formam um espaço vetorial? Caso formem, qual é sua dimensão?

.-.

Os polinômios $(t-1)^3$, $(t-1)^2$, $(t-1)$ e 1 são linearmente independentes no espaço P dos polinômios a coeficientes reais?

94. Se V é o espaço vetorial das funções reais de uma variável real, mostre que os subconjuntos abaixo constituem subespaços vetoriais de V:

$W_1 = \{f:R \to R$ tal que f é contínua$\}$.

$W_2 = \{f:R \to R$ tal que f é derivável$\}$.

$W_3 = \{f:R \to R$ tal que f é derivável e $f'(1) = 0\}$.

.-.

95. Seja $u_1 = (1,3,5)$ e $u_2 = (2,4,-3)$ vetores do R^3. Determine os valores de K para os quais $(2,7,k)$ pode ser escrito como combinação linear de u_1 e u_2.

.-.

96. Mostre que os subconjuntos de R^3

$W_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$

$W_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$,

são subespaços vetoriais. Quais suas dimensões? Ache um vetor $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq 0$.

.-.

Seja V o espaço das funções polinominais reais de grau menor ou igual a 2, definidas no intervalo [0,1]. Considere em V o produto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt .$$

Seja B' a base ortonormal obtida a partir de $B = \{1,t,t^2\}$ pelo processo de Gram Schmidt. A matriz de passagem de B' para B, $I]_B^{B'}$ é

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1/4\sqrt{3} & 1/36\sqrt{5} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & -1/6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/6\sqrt{5} \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2\sqrt{3} & 1/6\sqrt{5} \\ 0 & -1/4\sqrt{3} & -1/6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/36\sqrt{5} \end{pmatrix}$

E) NRA.

.-.

Para cada n, seja P_n o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n. Considere a transformação linear $T:P_2 \to P_3$ dada por

$$\forall p(t) \in P_2, \quad T(p(t)) = q(t) \in P_3 \quad \text{onde}$$

$$q'(t) = p(t) \quad e \quad q(0) = 0.$$

A matriz de T em relação a $\beta = \{1,t,t^2\} \subset P_2$ e $\beta' = \{1,t,t^2,t^3\} \subset P_3$ é:

A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

.-.

99. Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Existe um operador simétrico $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = \langle Tv, v\rangle \quad \text{onde} \quad v = (x,y).$$

A matriz de T é:

A) $\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$

B) $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$

C) $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

D) $\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

E) $\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$

.-.

)0. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Supondo $\|v\| = 1$, pela desigualdade de Cauchy podemos afirmar que $|f(x,y)|$ é menor ou igual a:

A) $[(14x + 2y)^2 + (2x + 11y)^2]^{1/2}$

B) 1

C) $[(11x + 7y)^2 + (2x + 2y)^2]^{1/2}$

D) $[(14x - 2y)^2 + (11x + 2y)^2]^{1/2}$

E) NRA.

.-.

101. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 14x^2 + 11y^2 + 4xy$$

Existem dois pontos mùtuamente perpendiculares e de norma 1 para os quais vale a igualdade na desigualda de correta do item anterior. Um dos pontos, e o valor de f no segundo ponto são, respectivamente:

A) $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ e 10

B) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ e 3

C) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ e 10

D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ e 3

E) NRA.

.-.

102. Sabe-se de mecânica que um corpo rígido em movimento de rotação em tôrno de um eixo e com vetor de rotação

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

tem momento angular $\vec{L} = L(\vec{w})$ dado por

$$\vec{L}(w) = \begin{pmatrix} Ixx & Ixy & Ixz \\ Iyx & Iyy & Iyz \\ Izx & Izy & Izz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

onde a matriz 3×3 acima é simétrica. (É chamada de tensor de inércia, e só depende da distribuição de massa e da origem do sistema de eixos).

Podemos afirmar que:

A) $\vec{L}$ e $\vec{w}$ são sempre perpendiculares.

B) $\vec{L}$ e $\vec{w}$ nunca estão alinhados.

C) Existem pelo menos três direções mùtuamente perpendiculares para as quais $\vec{L}$ e $\vec{w}$ estão alinhados.

D) Se $\vec{w} \neq 0$ então $\vec{w}$ e $L(\vec{w})$ são linearmente independentes.

E) NRA.

.-.

03. Considere a transformação $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(x,y,z) \longmapsto (-11x+2y+2z,\ -4x+z,\ 6x-y-z)$$

Verifique se T é inversível e assinale a alternativa correta.

A) T não é inversível.

B) T é inversível e a matriz de T^{-1} é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

C) T é inversível e a matriz de T^{-1} é tal que a soma de seus coeficientes é 20.

D) T é inversível e todos os coeficientes da matriz de T^{-1} são diferentes de zero.

E) T é inversível e a matriz de T^{-1} possue exata-

mente dois coeficientes negativos.

.-.

104. Seja $T: V \to V$ uma transformação linear, onde V é um espaço complexo com produto interno e considere as afirmações abaixo.

1) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de T então $V_\lambda = \{v \in V,\ Tv = \lambda v\}$ é um subespaço vetorial de V.

2) O número $0 \in \mathbb{C}$ é auto-vetor de $T \Leftrightarrow T$ não é inversível.

3) Se $\dim V = n$ e T tem n auto-valores distintos então T é diagonalizável.

4) Se T é auto-adjunta e λ é auto-vetor de T então $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Se T é auto-adjunta e $v_1, v_2 \in V$ são auto-vetores linearmente independentes de T, então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Então:

A) Tôdas são falsas.

B) Tôdas são verdadeiras.

C) Quatro são verdadeiras e uma é falsa.

D) Três são verdadeiras e duas são falsas.

E) Duas são verdadeiras e três são falsas.

.-.

105. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador simétrico cujos auto-valores são 3 e 4.

Sabe-se que (1,2,3) e (2,1,3) são auto-vetores associados ao auto-valor 3.

Podemos afirmar que T(5,5,-5) é

A) impossível de calcular a partir dos dados.

B) = (9,9,-9).

C) = (3,3,-3).

D) = (3,3,6).

E) NRA.

.-.

106. Ache a matriz real tal que $A^5 = \begin{pmatrix} 125 & 62 \\ 186 & -92 \end{pmatrix}$.

(Sugestão: a matriz dada é diagonalizável).

A) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$

.-.

107. Quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis?

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & -3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

A) Tôdas

B) Nenhuma

C) M, N, P

D) M, N, Q

E) N, P, Q

.-.

108. Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador simétrico.
Assinale a afirmação FALSA.

A) $\langle Tu,v\rangle = \langle Tv,u\rangle$

B) Sejam $v_2,\ldots,v_n$ auto-vetores linearmente de T. Seja v_1 um vetor perpendicular a cada v_j, $j=2,\ldots,n$. Então v_1 é auto-vetor de T.

C) Se u e v são auto-vetores de T, linearmente independentes e associados a um mesmo auto-vetor, então T possui no máximo n-1 auto-valores distintos.

D) Se a matriz de T em relação a qualquer base é diagonal então todos os auto-valores de T são iguais.

E) A matriz de T em relação a qualquer base do $\mathbb{R}^n$ é simétrica.

.-.

Considere o $\mathbb{R}^2$ com o produto interno $\langle X,Y\rangle = 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, onde $X = (x_1,x_2)$ e $Y = (y_1,y_2)$.

Se $v = (1,1)$, então $(v)^{\perp}$ é:

A) $\{(x_1,x_2) | x_1 - x_2 = 0\}$

B) $\{(x_1,x_2) | 3x_1 + x_2 = 0\}$

C) $\{(x_1,x_2) | x_1 - 3x_2 = 0\}$

D) $\{(x_1,x_2) | x_1 + x_2 = 0\}$

E) NRA.

.-.

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador lineer; sabe-se que $T]^{\beta}_{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, onde β é a base canônice do $\mathbb{R}^3$.

Determine $T(x,y,z)$.

A) $T(x,y,z) = (x+2y+z,\ y+z,\ -x+3y+5z)$.

B) $T(x,y,z) = (x-z,\ 2x+y+3z,\ x+y+5z)$

C) $T(x,y,z) = (x,y,5z)$

D) $T(x,y,z) = (x+2y,\ y-z,\ x+5y)$